

O livro é uma revisão extensa da primeira edição, publicada em 1948. Grande parte do material foi reescrito com vistas à exatidão lógica e clareza. O capítulo 11, sobre fórmulas integrais de Poisson, é inteiramente novo. Ao que saiba, o autor, constitui a primeira coleção de tais fórmulas. O número de exercícios foi aumentado consideravelmente, dando-se as respostas para a maioria deles. Algumas extensões da teoria aparecem nos exercícios.

Durante a preparação do livro nesta edição, o autor se valeu de sugestões de vários estudantes e colegas. Dentre seus colegas locais, Prof. C. L. Dolph, B. Dushnik, T. H. Hildebrandt, W. Kaplan e E. D. Rainville merecem agradecimentos especiais. Por comentários proveitosos de colegas, entre os quais J. R. Britton, W. B. Curry, R. J. Duffin, W. L. Duren, T. J. Higgins, I. Marx, M. E. Shanks e F. H. Steen, o autor expressa sua apreciação. A seleção do material e dos métodos de demonstração foi influenciada por alguns dos livros cujos títulos se encontram no Apêndice 1.

Ruel V. Churchill

CAPÍTULO 1

Números Complexos

1. Definição. Um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y ,

$$(1) \quad z = (x, y),$$

sujeito às regras e leis de operação a serem especificadas abaixo.

O par $(x, 0)$ é identificado com o número real x :

$$(2) \quad (x, 0) = x.$$

Esta regra permite configurar os números reais como um subconjunto do conjunto dos números complexos.

Convém dar um nome e um símbolo ao par $(0, 1)$. Este par será chamado *unidade imaginária* e indicado por i :

$$(0, 1) = i.$$

Os números reais x e y são, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* de (x, y) , sendo indicados por

$$\Re(z) = x, \quad \Im(z) = y.$$

Um par do tipo $(0, y)$ é um número *imaginário puro*.

Uma outra regra a ser imposta a tais pares é que dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária de um são iguais, respectivamente, às do outro.

$$(3) \quad (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{se, e somente se} \quad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2.$$

Em particular, visto que $0 = (0, 0)$, tem-se

$$z = (x, y) = 0 \quad \text{se, e somente se} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ têm a soma e o produto, denotados por $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$, definidos como os números complexos dados pelas fórmulas:

$$(4) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(5) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Em particular, tem-se $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ e $(0, y) = (y, 0)$ ($0, 1$). Assim, cada número complexo, que não é real, pode ser escrito como soma de um número real e um número imaginário puro:

$$(6) \quad z = (x, y) = x + yi.$$

O produto zz se escreve z^2 ; z^3 significa zz^2 , etc. De acordo com a definição (5), tem-se $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, isto é,

$$i^2 = -1.$$

Em vista da equação (6), a fórmula (5) pode ser escrita

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

A expansão formal do produto no primeiro membro, efetuada como se os binômios fossem reais, e a substituição de i^2 por -1 , dão o mesmo resultado. A definição (5) justifica esse procedimento formal.

Os pares ordenados (1) de números reais que satisfazem às condições (2) a (5) são *definidos* como números complexos.

2. Propriedades Adicionais. Podem-se definir várias outras operações sobre números. A operação de subtração é a inversa da adição, isto é, se a diferença $z_1 - z_2$ se denota por z_3 ,

$$z_1 - z_2 = z_3,$$

então z_3 é o número complexo que deve ser somado a z_2 para produzir z_1 :

$$z_2 + z_3 = z_1 \quad \text{ou} \quad (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1).$$

Em vista da definição (4), Sec. 1, da adição, tem-se

$$(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1)$$

e igualando-se as partes correspondentes, vê-se que

$$x_2 + x_3 = x_1, \quad y_2 + y_3 = y_1.$$

Resolvendo-se em relação a x_3 e y_3 , obtém-se a lei da subtração:

$$(1) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i.$$

A divisão é a inversa da multiplicação, isto é,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \quad \text{se } z_2 z_3 = z_1 \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\text{ou} \quad (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) = (x_1, y_1).$$

A seguir, igualando as partes correspondentes e resolvendo as duas equações resultantes em relação a x_3 e y_3 , obtemos a lei da divisão:

$$(2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \quad (z_2 \neq 0).$$

É útil observar que esta mesma fórmula aparece numa maneira puramente manipulativa quando o numerador e o denominador no primeiro membro são ambos multiplicados por $x_2 - y_2 i$.

A divisão por zero não é definida.

A partir das fórmulas para o quociente e o produto é fácil mostrar que

$$(3) \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2} \right), \quad \frac{1}{z_2 z_3} = \left(\frac{1}{z_2} \right) \left(\frac{1}{z_3} \right) \quad (z_2 \neq 0, z_3 \neq 0).$$

As operações fundamentais são ilustradas no seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{(-1 + 3i)(1 + 2i)}{2 - i} + 2i &= \frac{-7 + i}{2 - i} + 2i = -\frac{15}{5} - \frac{5}{5}i + 2i \\ &= -3 + i. \end{aligned}$$

As leis comutativas para a adição e a multiplicação,

$$(4) \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

decorrem da definição de números complexos e do fato de que os números reais satisfazem a tais leis. Por exemplo,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i = x_2 + x_1 + (y_1 + y_2)i \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

A prova da segunda das leis comutativas (4) é deixada como exercício. De acordo com esta lei, temos $yi = iy$, e doravante podemos escrever ou

$$z = x + yi \quad \text{ou} \quad z = x + iy.$$

As leis associativas para a adição e a multiplicação,

$$(5) \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \\ (6) \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$$

e a lei distributiva da multiplicação em relação à adição,

$$(7) \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

são também satisfeitas pelos números complexos. As demonstrações destas leis, que decorrem da definição e das leis correspondentes para os números reais, bem como as deduções de algumas consequências das leis (4) a (7), são deixadas como exercícios. Dentre as consequências vemos que

$$(8) \quad \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \left(\frac{z_2}{z_4} \right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0).$$

Estas fórmulas podem ser deduzidas com o auxílio das fórmulas (3). Observe-se que a lei distributiva (7) também é uma lei para fatoração.

Devemos destacar aqui outra propriedade que decorre da nossa definição. Se o produto de dois números complexos é nulo, então pelo menos um dos fatores deve ser nulo, isto é,

$$(9) \quad z_1 z_2 = 0 \quad \text{implica} \quad z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 = 0.$$

Da definição do produto decorre que, se $z_1 z_2 = 0$, então

$$(10) \quad x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0 \quad \text{e} \quad y_2 x_1 + x_2 y_1 = 0.$$

Se, pelo menos, um dos x_1 e y_1 não é nulo, então o determinante dos seus coeficientes no sistema homogêneo (10) deve ser igual a zero, isto é,

$$x_2^2 + y_2^2 = 0.$$

e portanto $x_2 = y_2 = 0$. Logo, se $z_1 z_2 = 0$, então ou $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou, ainda, $z_1 = z_2 = 0$.

3. Representação Geométrica. É natural associar ao par (x, y) , que representa o número complexo z , as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto no plano- xy . Cada número complexo corresponde a um único ponto, e reciprocamente. O número $-2+i$, por exemplo, é representado pelo ponto $(-2, 1)$ (Fig. 1). A origem representa o ponto $z = 0$. Quando usado para exibir os números complexos z geometricamente, o plano- xy se diz *plano complexo* ou *plano- z* .

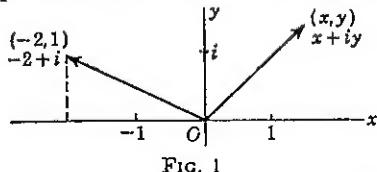


FIG. 1

Por outro lado, o número z pode ser concebido como o segmento orientado (vetor) da origem ao ponto (x, y) , ou como qualquer vetor obtido pela translação, no plano, desse vetor. Assim, o vetor emanando do ponto $(2, 1)$ ao ponto $(3, 3)$, que tem a primeira componente igual a 1 e a segunda igual a 2, representa o número $1+2i$. A representação vetorial e a representação por pontos, de números complexos, são, ambas, muito úteis.

Doravante, o número complexo z será considerado freqüentemente como ponto z ou como vetor z . Deve-se notar, porém, que o produto $z_1 z_2$ de dois números complexos é um número complexo, vetor no plano dos vetores z_1 e z_2 . Este produto, portanto, não é o produto escalar nem o produto vetorial, usados no cálculo vetorial. Conseqüentemente, os números complexos não podem ser identificados com os vetores do cálculo vetorial de dimensão dois. Os vetores no cálculo vetorial, assim como matrizes, são números complexos de outro tipo; suas álgebras são diferentes da álgebra para os números z .

De acordo com a definição da soma de dois números complexos, $z_1 + z_2$ corresponde ao ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Este ponto, por sua vez, corresponde ao vetor cujas componentes são as coordenadas do ponto. Assim, o número $z_1 + z_2$ é representado pela soma vetorial dos vetores z_1 e z_2 , como mostra a figura 2.

A diferença $z_1 - z_2$ é representada pelo vetor, partindo do ponto z_2 ao ponto z_1 (Fig. 3).

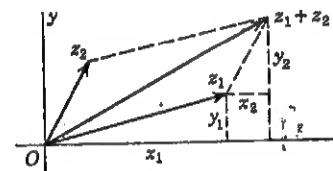


FIG. 2

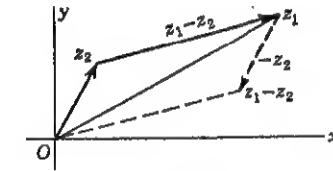


FIG. 3

EXERCÍCIOS

1. Verifique:

$$(a) (\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i; \quad (b) (2, -3)(-2, 1) = (-1, 8);$$

$$(c) (3, 1)(3, -1)(\frac{1}{3}, \frac{1}{10}) = (2, 1); \quad (d) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5};$$

$$(e) \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i; \quad (f) (1-i)^4 = -4.$$

2. Apresente os números $z_1, z_2, z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$ graficamente, quando

$$(a) z_1 = 2i, z_2 = \frac{3}{2} - i; \quad (b) z_1 = (-\sqrt{3}, 1), z_2 = (\sqrt{3}, 0);$$

$$(c) z_1 = (-3, 1), z_2 = (1, 4); \quad (d) z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_1 - y_1i.$$

3. Mostre que

$$(a) \frac{z}{z} = 1; \quad (b) \frac{1}{1/z} = z; \quad (c) \sigma(iz) = \sigma(z),$$

sendo $z \neq 0$ em (a) e (b).

4. Mostre que cada um dos dois números $z = 1 \pm i$ satisfaz à equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

5. Estabeleça as fórmulas (3), Sec. 2.

6. Prove a lei comutativa $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

7. Prove as leis associativas (5) e (6), Sec. 2.

8. Prove a lei distributiva (7), Sec. 2.

9. Sendo k um número real e $z = (x, y)$, mostre que $kz = (kx, ky)$, e portanto, $-z = -x - yi$, onde $-z$ designa $(-1)z$.

10. Estabeleça a primeira das fórmulas (8), Sec. 2.

11. Prove que $z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3$.

12. Mostre que o produto de três números z_1, z_2 e z_3 não depende da ordem de multiplicação, de modo que o produto pode ser escrito $z_1 z_2 z_3$.

13. Prove que, se $z_1 z_2 z_3 = 0$, pelo menos um dos três fatores é zero.

14. Prove que $(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4)$.

15. Estabeleça a segunda das fórmulas (8), Sec. 2, e mostre que

$$\frac{zz_1}{zz_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (z \neq 0, z_2 \neq 0).$$

16. Mostre que o ponto representado por $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ é o ponto médio do segmento entre os pontos z_1 e z_2 .

17. Prove que $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

18. Prove, por indução, a fórmula binomial

$$(1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} z^k + \dots + z^n,$$

onde n e k são inteiros positivos.

4. Conjugados Complexos. O conjugado complexo, ou simplesmente conjugado, de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é o número

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi.$$

O ponto \bar{z} é a reflexão do ponto z no eixo x , isto é, a posição do ponto \bar{z} é simétrica à do ponto z em relação ao eixo x (Fig. 4).

Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, então

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i);$$

em outras palavras, o conjugado da soma é a soma dos conjugados:

$$(1) \quad z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

O leitor poderá provar, de maneira análoga, que a operação de tomar conjugados também é distributiva em relação à subtração, à multiplicação e à divisão, isto é,

$$(2) \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$(3) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

O conjugado de $z_1 - z_2$ é ilustrado, como vetor, na Fig. 4.

Observe-se que o conjugado de \bar{z} é z .

O conjugado de um número real é ele próprio. Deve-se notar também que a soma de um número complexo e seu conjugado é um número real; de fato

$$(5) \quad z + \bar{z} = 2x = 2R(z).$$

Por outro lado, a diferença de um número complexo e seu conjugado é um número imaginário puro, a saber

$$(6) \quad z - \bar{z} = 2yi = 2g(z)i.$$

5. Valores Absolutos. Se x e y são reais, o número real não negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado *valor absoluto*, ou *módulo*, do número complexo $z = x + yi$, isto é, por definição,

$$(1) \quad |z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometricamente, o valor absoluto de z é o comprimento do vetor z ; é a distância entre o ponto z e a origem. Conseqüentemente, $|z_1 - z_2|$ é a distância entre os pontos z_1 e z_2 . Esta afirmação segue imediatamente da definição (1), já que

$$(2) \quad |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A condição $|z - i| = 3$, por exemplo, implica que o ponto z está sobre o círculo de raio 3 com centro em $(0, 1)$.

O enunciado $|z_1| > |z_2|$ significa que o ponto z_1 está a maior distância da origem do que o ponto z_2 . A noção elementar de ordem, "maior do que" ou "menor do que", se aplica a valores absolutos, uma vez que eles são números reais. Entretanto, tal noção não se aplica, em geral, a números complexos, isto é, uma afirmação do tipo $z_1 > z_2$ ou $z_1 < z_2$ não tem significado a menos que z_1 e z_2 sejam ambos reais.

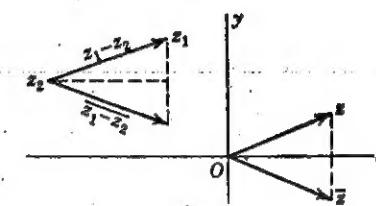


FIG. 4

Associados a cada número complexo z há três números reais já definidos, $|z|$, $\Re(z)$ e $\Im(z)$, que se relacionam pela equação

$$|z|^2 = [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2$$

e pelas condições

$$(3) \quad |z| \geq |\Re(z)| \geq \Re(z), \quad |z| \geq |\Im(z)| \geq \Im(z).$$

Visto que $\bar{z} = (x, -y)$ quando $z = (x, y)$, é imediato que

$$(4) \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$(5) \quad |\bar{z}| = |z|.$$

A partir das definições de produto, quociente e valor absoluto, pode-se mostrar que os símbolos de valor absoluto são distributivos em produtos e quocientes, isto é,

$$(6) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$(7) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0).$$

É mais simples, porém, estabelecer essas fórmulas com o auxílio da fórmula (4) e propriedades de conjugados. Para provar a fórmula (6), por exemplo, pode-se usar uma extensão da lei associativa (Exercício 14, Sec. 3) para se escrever

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2);$$

$$\text{isto é,} \quad |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = 0.$$

$$\text{Assim, tem-se} \quad (|z_1 z_2| - |z_1| |z_2|)(|z_1 z_2| + |z_1| |z_2|) = 0.$$

Se nenhum dos z_1 e z_2 é zero, o segundo fator em parêntesis tem um valor positivo, e portanto, o primeiro fator deve ser nulo, donde segue a fórmula (6). Quando $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, a fórmula (6) é obviamente verdadeira.

As duas desigualdades triangulares

$$(8) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$(9) \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

nos dizem que nenhum lado de um triângulo é maior, em comprimento, do que a soma dos dois outros lados (Fig. 2), nem é menor do que a diferença dos comprimentos dos demais lados (Fig. 3). Em vista da desigualdade (9),

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|,$$

mas esta desigualdade é trivial a menos que $|z_1| > |z_2|$. Note-se também que, substituindo z_2 por $-z_2$ em (8) e (9), podemos escrever

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

As desigualdades triangulares podem ser demonstradas algebraicamente. A desigualdade (8), por exemplo, é estabelecida assim: Escreve-se primeiro

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Agora, $\bar{z}_1 z_2$ é o conjugado de $z_1 \bar{z}_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} & z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\Re(z_1 \bar{z}_2), \\ \text{e} \quad & |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = -2[|z_1| |z_2| - \Re(z_1 \bar{z}_2)]. \end{aligned}$$

De acordo com (3) e (5), tem-se $\Re(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$.

Logo $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ e a desigualdade (8) segue quando o primeiro membro é fatorado.

Em vista da desigualdade (8), tem-se, por exemplo,

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

Esta propriedade é facilmente estendida, por indução, à forma

$$(10) \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

6. A Forma Polar. Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto representando z (Fig. 5), onde $r \geq 0$. Então

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

e o número complexo z pode ser escrito na forma polar

$$(2) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r \geq 0).$$

O raio vetor r é $\sqrt{x^2 + y^2}$, isto é,

$$(3) \quad r = |z|.$$

O ângulo θ é chamado *argumento* de z denotado por $\arg z$. Quando $z \neq 0$, os valores de θ são determinados a partir das equações (1) ou da relação

$$(4) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

e do quadrante em que o ponto z se encontra. Entretanto, $\arg z$ é multivalente, pois, nas equações (1), $\sin \theta$ e $\cos \theta$ são funções periódicas de θ com período 2π radianos. Se $z \neq 0$, existe um único valor de θ , em radianos, no intervalo $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$, onde θ_0 é um número qualquer. Quando $z = 0$, então $r = 0$, e θ é arbitrário.

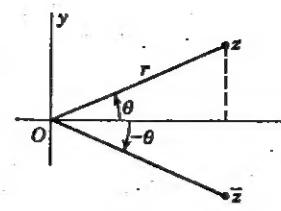


FIG. 5

Como um exemplo, podemos ver que, se $z = 2 - 2i$, então $r = 2\sqrt{2}$ e $\arg z = -\pi/4 \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); como outro exemplo,

$$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Quando z tem a forma (2), a forma polar do seu conjugado é

$$(5) \quad \bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)].$$

Assim, um dos valores de $\arg(\bar{z})$ é $-\arg z$.

É conveniente usar, às vezes, a representação polar em torno de um certo ponto z_0 ao invés da origem. A representação

$$(6) \quad z - z_0 = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

de $z - z_0$, na forma polar, pode ser interpretada graficamente como indicada na figura 6, isto é, ρ é a distância entre z e z_0 , $\rho = |z - z_0|$, e ϕ é o ângulo de inclinação do vetor.

Como ilustração, a equação

$$z + i = z - (-i) = 4(\cos \phi + i \sin \phi),$$

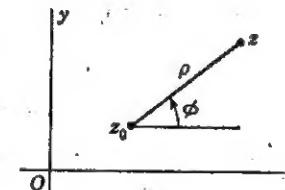


FIG. 6

onde ϕ assume todos os valores no intervalo $0 \leq \phi < 2\pi$, representa os pontos do círculo de raio de 4 e com centro em $(0, -1)$.

7. Produtos, Potências e Quocientes. O produto dos dois números

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

é

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)],$$

e esta fórmula se reduz à forma polar do produto,

$$(1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

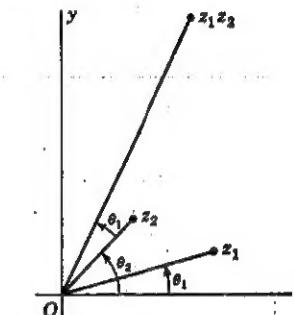
Logo, um dos argumentos do produto é a soma, $\theta_1 + \theta_2$, dos argumentos dos fatores,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Geometricamente, o comprimento do vetor $z_1 z_2$ é igual ao produto dos comprimentos de z_1 e z_2 . O ângulo de inclinação do vetor $z_1 z_2$ é a soma dos ângulos θ_1 e θ_2 (Fig. 7).

Em particular, quando um número complexo z é multiplicado por i , o vetor resultante iz é aquele que se obtém girando o vetor z , no sentido anti-horário, de ângulo reto e sem alterar o comprimento do vetor, visto que

$$\begin{aligned} iz &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$



Da fórmula (1) decorre imediatamente

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)].$$

Conseqüentemente, se $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e se n é um número inteiro positivo,

$$(2) \quad z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Quando $r = 1$, esta fórmula se reduz ao *teorema de De Moivre* para expoentes inteiros positivos,

$$(3) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

O quociente de dois números complexos é dado, na sua forma polar, pela fórmula

$$(4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (r_2 \neq 0).$$

Como a divisão é a inversa da multiplicação, esta fórmula pode ser facilmente obtida a partir da fórmula (1). Tem-se, como caso particular,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta),$$

e, em vista de (2), se z^{-n} designa $1/z^n$,

$$(5) \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)] = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Assim sendo, a fórmula (2) e o teorema de De Moivre (3) são válidos também para expoentes inteiros negativos.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que

(a) $\bar{z} + \bar{3i} = z - 3i$; (b) $\bar{iz} = -i\bar{z}$;
 (c) $\frac{(2+i)^2}{3-4i} = 1$; (d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$.

2. Determine um valor de $\arg z$ quando

(a) $z = \frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$); (b) $z = z_1^n$ ($n = 1, 2, \dots$);
 (c) $z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$; (d) $z = \frac{i}{-2-2i}$; (e) $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

Resp. (a) $\arg z_1 - \arg z_2$; (b) $n \arg z_1$; (c) $2\pi/3$; (e) π .

3. Usando a forma polar, mostre que

(a) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 2+2i\sqrt{3}$; (b) $\frac{5i}{2+i} = 1+2i$;
 (c) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$;
 (d) $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.

4. Sejam z_0 um número complexo fixo e R uma constante positiva, explique por que um ponto z se situa sobre um círculo de raio R com centro em $-z_0$ quando z satisfaz a qualquer uma das seguintes equações

(a) $|z + z_0| = R$;
 (b) $z + z_0 = R(\cos \phi + i \sin \phi)$, onde ϕ é real;
 (c) $zz + \bar{z}z + z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2$.

5. Prove que

(a) z é real se $\bar{z} = z$; (b) z é real ou imaginário puro se $z^2 = (\bar{z})^2$.

6. Estabeleça

(a) fórmula (3), Sec. 4; (b) fórmula (4), Sec. 4.

7. Prove que

(a) $\overline{z_1 z_2 z_3} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$; (b) $\overline{(z^4)} = (\bar{z})^4$.

8. Demonstre a propriedade (7), Sec. 5, relativa ao valor absoluto de um quociente.

9. Sendo $z_2 z_3 \neq 0$, mostre que

(a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2 \bar{z}_3}$; (b) $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

10. Dê uma demonstração algébrica da desigualdade triangular (9), Sec. 5.

11. Sendo $|z_2| \neq |z_3|$, mostre que

$$\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}.$$

12. Prove que $|z| \sqrt{2} \geq |\Re(z)| + |\Im(z)|$.

13. Seja $z_1 z_2 \neq 0$. Usando a forma polar com argumentos medidos em radianos, mostre que

$$\Re(z_1 z_2) = |z_1| |z_2|$$

se, e somente se, $\arg z_2 = \arg z_1 \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

14. Seja $z_1 z_2 \neq 0$. Usando o resultado em Ex. 13, mostre que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

se, e somente se, $\arg z_2 = \arg z_1 \pm 2n\pi$. Verifique esta afirmação geometricamente.

15. Seja $z_1 z_2 \neq 0$. Usando o resultado em Ex. 13, mostre que

$$|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$$

se, e somente se, $\arg z_2 = \arg z_1 \pm 2n\pi$. Verifique esta afirmação geometricamente.

16. Estabeleça a fórmula

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1),$$

para a soma de uma série geométrica finita, e daí deduza as seguintes fórmulas

$$(a) 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2 \sin(\theta/2)},$$

$$(b) \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2 \sin(\theta/2)},$$

onde $0 < \theta < 2\pi$.

8. Extração de Raízes. O problema de extrair as raízes n -ésimas $z^{1/n}$ de um número complexo z é o de resolver a equação

$$(1) \quad z_0^n = z$$

para z_0 , quando z e o número inteiro positivo n são dados.

Seja

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

a forma polar de z , $z \neq 0$, e escrevemos

$$z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0),$$

onde r_0 e θ_0 são ainda incógnitas. A equação (1) fica

$$r_0^n(\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Conseqüentemente, se os ângulos são medidos em radianos,

$$r_0^n = r, \quad n\theta_0 = \theta \pm 2k\pi,$$

14 - VARIÁVEIS COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES

onde k é zero ou inteiro positivo qualquer. Como r e r_0 são números positivos, r_0 deve ser a raiz n -ésima real positiva de r . Agora,

$$\theta_0 = \frac{\theta}{n} \pm \frac{2k\pi}{n};$$

mas esses valores de θ_0 dão o mesmo valor de z_0 para dois inteiros k quaisquer que difiram entre si de um múltiplo de n . Portanto, existem exatamente n soluções distintas da equação (1) quando $z \neq 0$, a saber

$$(2) \quad z_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right),$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. São estes os n valores de $z^{1/n}$.

Geometricamente, o comprimento de cada um dos n vetores $z^{1/n}$ é o número positivo $\sqrt[n]{r}$. O argumento de um desses vetores é o ângulo obtido dividindo-se θ por n , e os demais argumentos são obtidos por adição de múltiplos de $2\pi/n$ a θ/n .

Quando $z = 0$, equação (1) tem uma e uma só solução $z_0 = 0$; portanto $0^{1/n} = 0$.

Como $1 = \cos 0 + i \sin 0$, as raízes n -ésimas da unidade podem ser escritas

$$(3) \quad 1^{1/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Em particular, quando $k = 1$, a raiz correspondente se denota por ω :

$$(4) \quad \omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Em vista do teorema de De Moivre (Sec. 7), as raízes (3) são

$$(5) \quad 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

No plano complexo, as raízes n -ésimas da unidade são os vértices do polígono regular de n lados, inscrito no círculo $|z| = 1$, com um vértice no ponto $z = 1$. Veja a figura 8 para $n = 3$ e a figura 9 para $n = 6$.

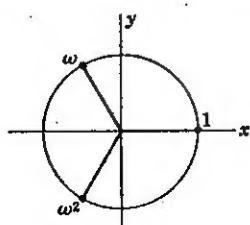


FIG. 8

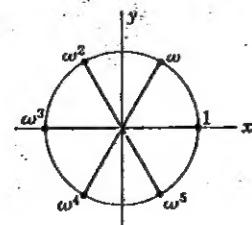


FIG. 9

Se z_1 é uma raiz n -ésima qualquer de z , então

$$(6) \quad z_1, z_1\omega, z_1\omega^2, \dots, z_1\omega^{n-1}$$

são as n raízes n -ésimas de z , pois, multiplicar z_1 por ω^k corresponde a aumentar de $2k\pi/n$ o argumento de z_1 .

Sejam m e n inteiros positivos sem fator comum. De acordo com a fórmula (2) e a expressão (6),

$$(7) \quad (z^m)^{1/n} = \sqrt[n]{r^m} \left(\cos \frac{m\theta}{n} + i \sin \frac{m\theta}{n} \right) \omega^h \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(8) \quad (z^{1/n})^m = (\sqrt[n]{r})^m \left[\left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \omega^k \right]^m \\ = \sqrt[n]{r^m} \left(\cos \frac{m\theta}{n} + i \sin \frac{m\theta}{n} \right) \omega^{km} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Os dois conjuntos de n números acima são idênticos, se os conjuntos ω^h e ω^{km} coincidem quando h e k percorrem, independentemente, os valores $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Mostremos primeiro que ω^{km} tem n valores distintos. Se dois dos seus valores, correspondentes a dois valores distintos k' e k'' de k , fossem iguais, então os dois pontos $\omega^{k'm}$ e $\omega^{k''m}$ coincidiriam e, em vista da fórmula (4), existiria um inteiro positivo p tal que

$$\frac{2\pi k'm}{n} = \frac{2\pi k''m}{n} \pm 2\pi p, \quad \text{ou} \quad (k' - k'') \frac{m}{n} = \pm p.$$

Como m/n é irredutível, $k' - k''$ seria divisível por n , isto é, existiria um inteiro positivo j tal que $|k' - k''| = \pm nj$. Mas isto é impossível já que $|k' - k''| < n$.

Mostremos agora que, para cada valor fixado de k , o número ω^{km} é um dos n números distintos ω^h , o que mostra a coincidência dos dois conjuntos em questão. Seja qn o maior múltiplo de n que não excede km , sendo q zero ou algum inteiro positivo, de modo que

$$km = qn + h'$$

onde h' toma um dos valores $0, 1, 2, \dots, n-1$. Segue-se, então, da fórmula (4), que $\omega^{km} = \omega^{h'}$, e este último é o número ω^h quando $h = h'$.

Assim, a coincidência dos dois conjuntos de números (7) e (8) está completamente demonstrada. Os n números em qualquer um dos conjuntos podem ser indicados por $z^{m/n}$.

$$(9) \quad z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m} \left\{ \cos \left[\frac{m}{n} (\theta + 2\pi k) \right] + i \sin \left[\frac{m}{n} (\theta + 2\pi k) \right] \right\},$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Definiremos z^c , onde c é qualquer número complexo, na Sec. 28. O número $1/z^c$ é escrito z^{-c} . Portanto, se o expoente é racional, escrevemos $z^{-m/n}$ para $1/z^{m/n}$. Podemos mostrar, dos resultados já estabelecidos, que o conjunto $z^{-m/n}$ pode ser escrito

$$(10) \quad z^{-m/n} = (z^{1/n})^{-m} = (z^{-m})^{1/n}.$$

9. Regiões no Plano Complexo. Daremos aqui as definições de alguns termos técnicos.

Uma *vizinhança* de um ponto z_0 é o conjunto de todos os pontos para os quais

$$(1) \quad |z - z_0| < \epsilon,$$

onde ϵ é alguma constante positiva. Assim, uma vizinhança consiste em todos os pontos de um disco, ou região circular, inclusive o centro z_0 mas sem os pontos do círculo de contorno. O termo *vizinhança* será usado estritamente neste sentido.

Um ponto z_0 se diz *ponto de acumulação*, ou ponto-límite, de um conjunto de pontos no plano- z , se toda vizinhança de z_0 contém pontos do conjunto, distintos de z_0 . Sendo assim, cada ponto do círculo $|z| = c$ é um ponto de acumulação do conjunto $|z| < c$, e esses pontos de acumulação não pertencem ao conjunto. Cada ponto do conjunto $|z| < c$ é também um ponto de acumulação do conjunto. Como outro exemplo, o conjunto dos pontos $z = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) tem o ponto de acumulação $z = 0$.

Um *ponto interior* de um conjunto S é um ponto de S tal que alguma vizinhança desse ponto contém somente pontos de S . Assim, pontos interiores são sempre pontos de acumulação. Se um ponto de acumulação z_0 de um conjunto S não é ponto interior, isto é, se cada vizinhança de z_0 contém um ponto não pertencente a S , assim como pontos de S , então z_0 se diz *ponto de fronteira* do conjunto S . Em particular, então, todo ponto de acumulação que não pertence ao conjunto é um ponto de fronteira. A origem $z = 0$, bem como cada ponto do círculo unitário $|z| = 1$, é um ponto de fronteira de qualquer um dos seguintes conjuntos

$$(2) \quad 0 < |z| < 1 \quad \text{ou} \quad 0 < |z| \leq 1.$$

O conjunto (1) e o primeiro dos conjuntos (2) são exemplos de *regiões abertas*, conjuntos que contêm somente pontos interiores. Um conjunto que consiste de todos os pontos de uma região aberta e, eventualmente, de alguns dos seus pontos de fronteira, tal como o segundo dos conjuntos (2), se diz simplesmente *região*. Uma região é *limitada* se todos os seus pontos pertencem a um certo disco $|z| < c$ para alguma constante c . Assim, as regiões (2) são limitadas, enquanto que a região

aberta $x > 0$ é ilimitada. Uma região limitada que contém todos os seus pontos de acumulação será chamada *região fechada*. O fecho \bar{R} de uma região limitada R é o conjunto formado por todos os pontos de R e por todos os seus pontos de fronteira. A região fechada $|z| \leq 1$, por exemplo, é o fecho de cada uma das regiões (2).

Uma região é *conexa* se dois pontos quaisquer da mesma, podem ser ligados por uma cadeia contínua de um número finito de segmentos cujos pontos pertencem à região. Assim, a região aberta que consiste de todos os pontos interiores ao círculo $|z| = 1$ e de todos os pontos exteriores ao círculo $|z| = 2$, *não* é conexa.

Uma região aberta e conexa é denominada *domínio*. O domínio

$$(3) \quad 0 < \arg z < 2\pi, \quad |z| > 0,$$

por exemplo, contém todos os pontos do plano, exceto a origem e os pontos do semi-eixo positivo dos x .

EXERCÍCIOS

1. Ache todos os valores das seguintes raízes. Verifique-as graficamente.

$$(a) (2i)^{\frac{1}{2}}; \quad (b) (-i)^{\frac{1}{3}}; \quad (c) (-1)^{\frac{1}{3}}; \quad (d) 8^{\frac{1}{6}}.$$

Resp. (a) $\pm(1+i)$; (b) $i, (\pm\sqrt{3}-i)/2$; (d) $\pm\sqrt{2}, (\pm 1 \pm i\sqrt{3})/\sqrt{2}$.

2. Ache todos os valores de

$$(a) (-1+i\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}; \quad (b) (-1)^{-\frac{3}{4}}.$$

Resp. (a) $\pm 2\sqrt{2}$.

3. Ache as quatro raízes da equação $z^4 + 4 = 0$ e, usando-as, fatore $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

Resp. $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.

4. Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica finita (Ex. 16, Sec. 7), mostre que, se w é uma raiz n -ésima imaginária da unidade, então

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0.$$

5. Mostre que a fórmula quadrática usual resolve a equação quadrática $az^2 + bz + c = 0$ onde os coeficientes a, b e c são números complexos.

6. Sendo m e n inteiros positivos, mostre (a) que

$$(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m;$$

(b) que os dois conjuntos de números $(z_1 z_2)^{1/m}$ e $z_1^{1/m} z_2^{1/m}$ são iguais; e portanto, (c) que os dois conjuntos $(z_1 z_2)^{mn}$ e $z_1^{mn} z_2^{mn}$ coincidem.

7. Descreva geometricamente a região determinada por cada uma das seguintes condições. Classifique, também, a região conforme termos definidos na Sec. 9.

(a) $|\Re(z)| < 2$; (b) $|z - 4| > 3$; (c) $|z - 1 + 3i| \leq 1$;
 (d) $|\Im(z)| > 1$; (e) $\Im(z) > 0$; (f) $0 \leq \arg z \leq \pi/4, z \neq 0$.

Resp. (a), (b), (e) domínio ilimitado; (c) região fechada, o fecho de um domínio limitado;
 (d) região aberta ilimitada, não conexa.

8. Descreva geometricamente cada uma das seguintes regiões:

(a) $-\pi < \arg z < \pi, |z| > 2$; (b) $1 < |z - 2i| < 2$;
 (c) $|2z + 3| > 4$; (d) $\Im(z^2) > 0$;
 (e) $\Re\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$; (f) $|z - 4| > |z|$.

CAPÍTULO 2

Funções Analíticas

10. Funções de uma Variável Complexa. Quando z designa qualquer um dos números de um conjunto S de números complexos, chamamos z de variável complexa. Se, para cada valor de z em S , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, então w é uma função da variável complexa z no conjunto S :

$$w = f(z).$$

O conjunto S é usualmente um domínio. Nesse caso ele se diz domínio de definição da função w . Os valores $f(z)$, correspondentes a todos os z em S , constituem um outro conjunto R de números complexos, conhecido como contradomínio da função w .

Uma função é univalente num conjunto S se ela tem um único valor correspondente a cada valor de z em S . Convencionemos que o termo função significa função univalente, a menos que o contrário seja explicitamente indicado. De um modo geral, o estudo sobre funções multivalentes, tais como $z^{\frac{1}{2}}$, pode ser feito lidando com funções univalentes, cada uma das quais toma, para cada valor de z , um dos valores múltiplos num domínio especificado.

O domínio de definição de cada uma das seguintes funções

$$f_1(z) = z^3 + 2iz - 3, \quad f_2(z) = |z|, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

é o plano complexo inteiro, com exceção de f_3 , que não está definida nos pontos $z = \pm i$. Observe que f_2 é uma função real da variável complexa z ; de fato, o seu contradomínio é o semi-eixo não negativo do eixo real.

As funções $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ são também reais. Se u e v são duas funções reais quaisquer das variáveis reais x e y , então $u + iv$ é uma função de z . Reciprocamente, toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária bem definidas, as quais são funções reais de x e y . Se u e v designam tais partes, então

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Por exemplo, se

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2,$$

então

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v = 2xy$$

Como outros exemplos, a função

$$f_4(z) = x^2 + i(2x + y)$$

é definida sobre todo plano- z , ao passo que o domínio de definição da função

$$f_5(z) = y \int_0^{\infty} e^{-xt} dt + i \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

é a faixa semi-infinita $x > 0, -1 < y < 1$, visto que a integral imprópria existe e a série infinita converge somente quando x e y são assim restritos.

Se n é zero ou um inteiro positivo e se a_0, a_1, \dots, a_n são constantes complexas, a função

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

é um polinômio em z , de grau n . Observe que a soma aqui tem um número finito de termos. O domínio de definição de todo polinômio é o plano inteiro. Quocientes de polinômios, $P(z)/Q(z)$, também chamados funções racionais, são definidos para todos os z , exceto aqueles para os quais $Q(z) = 0$. A função f_3 acima é um exemplo. Polinômios e seus quocientes constituem duas classes elementares, mas importantes, de funções de uma variável complexa.

11. Transformação. Propriedades de uma função real $f(x)$, de uma variável real x , são demonstradas geometricamente pelo gráfico da função. A equação $y = f(x)$ estabelece uma correspondência entre pontos x no eixo- x e pontos y no eixo- y , isto é, ela leva pontos x em pontos y . A descrição gráfica melhora quando se leva cada ponto x num ponto (x, y) do plano- xy , ponto este que se situa à distância orientada y acima ou abaixo do ponto x . A curva assim obtida é o gráfico de $f(x)$. Da mesma maneira, usamos uma superfície para exibir graficamente uma função real $f(x, y)$ das variáveis reais x e y .

Entretanto, quando $w = f(z)$ e as variáveis w e z são complexas, não dispomos de tal representação gráfica da função f , uma vez que precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis. Algumas informações sobre a função podem, entretanto, ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes z e w . É mais simples, em geral, desenhar dois planos complexos separadamente para as variáveis z e w : para cada ponto (x, y) no plano- z , no domínio de definição de f , existe um ponto (u, v) no plano- w , onde $w = u + iv$.

A correspondência entre pontos nos dois planos se diz *aplicação* ou *transformação* de pontos no plano- z em pontos do plano- w pela função f . Pontos w são, então, *imagens* de pontos z . Este termo se aplica também entre conjuntos como, por exemplo, imagem de uma curva, de uma região, etc.

Para se empregar certos termos geométricos tais como *translação*, *rotação* e

reflexão, é conveniente, às vezes, considerar a aplicação como transformação num só plano. A função $z + 2$, por exemplo, pode ser encarada como uma translação de cada ponto z à posição $w = z + 2$, duas unidades para a direita de z . A função $w = \bar{z}$ leva cada ponto z na reflexão \bar{z} desse ponto no eixo real.

A transformação de curvas e regiões fornece, em geral, mais informações sobre a função do que a transformação de pontos individuais. Como ilustração, a função

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$$

leva os pontos de cada círculo $x^2 + y^2 = c^2$, onde $c \geq 0$, em alguns pontos da reta $u = c$, pois $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mas, para se ter todos os z no círculo, y deve assumir todos os valores de $-c$ até c e, como $v = -y$, v varia de c a $-c$. A imagem do círculo, $u = c, -c \leq v \leq c$, é o segmento da reta $u = c$ compreendido entre as retas $v = u$ e $v = -u$ (Fig. 10). Visto que os dois pontos $z = x + iy$ e $z = -x + iy$ têm a mesma imagem w , cada ponto do segmento, exceto as extremidades, é a imagem de dois pontos do círculo. O domínio D de definição da função w é o plano- z inteiro. Cada ponto de D se situa sobre um desses círculos, pois c pode ser qualquer constante não negativa, e a imagem desse círculo é o segmento descrito acima. Reciprocamente, um tal segmento é sempre a imagem de um dos círculos. Portanto, a imagem de D , contradomínio R da função w , é o quadrante

$$u \geq 0, -u \leq v \leq u.$$

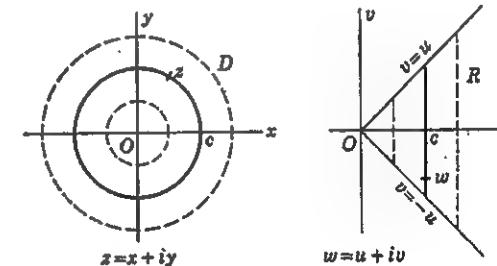


FIG. 10

12. Limites. Seja f uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de um ponto z_0 , exceto, eventualmente, no próprio ponto z_0 . A afirmação de que o limite desta função, quando z tende para z_0 , é um número w_0 ,

(1)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

significa que o valor $f(z)$ da função é arbitrariamente próximo do valor w_0 para todos os pontos z numa vizinhança de z_0 , exceto, eventualmente, para $z = z_0$, quan-

do essa vizinhança se torna suficientemente pequena. Vamos enunciar esta definição numa forma precisa e utilizável.

Dados uma função f e dois números complexos z_0 e w_0 , a afirmação (1) significa que, para cada número positivo ϵ , existe um número positivo δ tal que

$$(2) \quad |f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| < \delta \quad (z \neq z_0).$$

Graficamente, a definição (2) exige que, para cada número positivo ϵ , exista um certo número positivo δ , tal que todos os pontos z , exceto z_0 , interiores ao círculo $|z - z_0| = \delta$ no plano- z , tenham suas imagens $w = f(z)$ no interior do círculo $|w - w_0| = \epsilon$ no plano- w (Fig. 11). Observe que a definição exige apenas que todas as imagens pertençam à vizinhança $|w - w_0| < \epsilon$; não é necessário que elas constituam a vizinhança toda. Quando $f(z)$ é uma constante w_0 , por exemplo, w nada mais é que o centro z_0 dessa vizinhança. Os pontos z , porém, formam todo o domínio $0 < |z - z_0| < \delta$. O símbolo $z \rightarrow z_0$ significa que z se aproxima de z_0 numa maneira arbitrária e não, por exemplo, numa direção particular.

O limite fica estabelecido quando se encontra alguma fórmula para δ como função de ϵ . Tal fórmula $\delta = \phi(\epsilon)$, porém, não é única, uma vez que a condição continua satisfeita quando δ é substituído por um número menor; $\delta = \frac{1}{2}\phi(\epsilon)$, por exemplo, é uma outra fórmula.

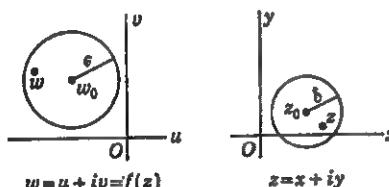


FIG. 11

A definição fornece um meio para testar se w_0 é o limite de f . Contudo, ela não dá, diretamente, um método para determinar o limite w_0 . Teoremas sobre limites, deduzidos a partir da definição, nos permitem achar limites de diversas funções.

Vamos aplicar a definição para provar que

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2.$$

O valor da função $f(z) = (z^2 - 1)/(z - 1)$ não está definido quando $z = 1$; quando $z \neq 1$, $f(z) = z + 1$. Assim,

$$|f(z) - 2| = |z + 1 - 2| = |z - 1| \quad (z \neq 1),$$

e portanto

$$|f(z) - 2| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - 1| < \epsilon;$$

isto é, a condição (2) é satisfeita para todo número positivo ϵ se $\delta = \epsilon$. Isto prova a afirmação (3).

Como outro exemplo, mostremos que

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow 2i} (2z + iy^2) = 4i \quad (z = x + iy).$$

Para cada número positivo ϵ exibiremos um número δ tal que

$$(5) \quad |2z + iy^2 - 4i| < \epsilon$$

sempre que $|z - 2i| < \delta$. Para simplificar o problema, escrevamos

$$|2z + iy^2 - 4i| \leq 2|z| + |y^2 - 4| = 2|x| + |y - 2||y + 2|$$

e, a seguir, procuremos um valor de δ tal que

$$(6) \quad 2|x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |y - 2||y + 2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mas, se $|z - 2i|$ é pequeno, então o valor de y é próximo de 2 e, portanto, $y + 2$ tem um valor vizinho de 4. A segunda das desigualdades (6) poderá, então, ser satisfeita se $|y - 2| < \epsilon/10$, isto é, se

$$-\frac{\epsilon}{10} < y - 2 < \frac{\epsilon}{10} \quad \text{ou} \quad 4 - \frac{\epsilon}{10} < y + 2 < 4 + \frac{\epsilon}{10}.$$

Assim, $|y + 2| < 4 + \epsilon/10 < 5$ desde que $\epsilon < 10$ e, portanto, $|y - 2||y + 2| < \epsilon/2$. Se $\epsilon \geq 10$ na desigualdade (5), então essa desigualdade é certamente satisfeita quando $|2z + iy^2 - 4i| < 5$, e podemos usar, com segurança, o valor de δ que corresponde a $\epsilon = 5$.

Acabamos de mostrar que a condição (5) será satisfeita sempre que o ponto z estiver no domínio retangular (Fig. 12)

$$|x| < \frac{\epsilon}{4} \quad |y - 2| < \frac{\epsilon}{10} \quad (0 < \epsilon < 10).$$

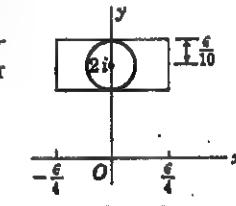


FIG. 12

A vizinhança $|z - 2i| < \epsilon/10$ é interior a esse domínio. Nossa fórmula para δ que estabelece o limite (4) pode, então, ser escrita

$$(7) \quad \delta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{10} & \text{quando } 0 < \epsilon < 10, \\ \frac{1}{2} & \text{quando } \epsilon \geq 10. \end{cases}$$

Quando o limite de uma função f existe em z_0 , esse limite tem um único valor. Com efeito, suponhamos que o limite pudesse ter dois valores distintos w_0 e w_1 . Então, para cada número positivo ϵ , arbitrariamente pequeno, existiria um número δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{e} \quad |f(z) - w_1| < \epsilon \\ \text{quando } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Decorreria, então, que

$$|(f(z) - w_0) - (f(z) - w_1)| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < 2\epsilon;$$

isto é, $|w_1 - w_0| < 2\epsilon$. Mas w_0 e w_1 são constantes distintas e, portanto, $|w_0 - w_1|$ não pode ser arbitrariamente pequeno. Está, assim, demonstrada a unicidade do limite.

13. Teoremas sobre Limites. Podemos tratar problemas de limite estabelecendo a conexão entre o limite de uma função de uma variável complexa e os limites de funções reais de duas variáveis reais. Limites do último tipo são tratados no cálculo avançado. Usaremos livremente a definição e as propriedades desses limites.

Teorema 1. Sejam

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \quad \text{e} \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Então, o limite de f existe em z_0 e é igual a $u_0 + iv_0$,

(1)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0,$$

se, e somente se os limites de u e v existem em (x_0, y_0) e são iguais a u_0 e v_0 respectivamente.

$$(2) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Para estabelecer a necessidade de (2), suponhamos que (1) seja verdadeiro. Então, para cada número positivo ϵ , existe um número δ tal que

$$(3) \quad |u - u_0 + i(v - v_0)| < \epsilon \\ \text{sempre que } 0 < |z - z_0 + i(y - y_0)| < \delta.$$

Como $|u - u_0| \leq |u - u_0 + i(v - v_0)|$ e $|v - v_0| \leq |u - u_0 + i(v - v_0)|$,

segue-se que

$$(4) \quad |u - u_0| < \epsilon \quad \text{e} \quad |v - v_0| < \epsilon \\ \text{sempre que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2.$$

Assim, existe uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) na qual, exceto eventualmente no próprio ponto, $|u(x, y) - u_0| < \epsilon$ e $|v(x, y) - v_0| < \epsilon$. Uma região quadrada interior à vizinhança circular também serve para nosso propósito. De acordo com a definição de limite de uma função real de duas variáveis reais, os limites de u e v existem e têm os valores indicados em (2).

Reciprocamente, se as condições (2) estão satisfeitas, então, para cada número positivo ϵ , existem dois números δ_1 e δ_2 tais que

$$|u - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2 \\ \text{e} \\ |v - v_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2.$$

Seja δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2 . Então, para este δ , a condição (3) se verifica, visto que

$$|u - u_0 + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0|.$$

Assim sendo, a afirmação (1) é uma consequência de (2), e a demonstração do teorema está completa.

Teorema 2. Sejam f e F funções cujos limites existem em z_0 :

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = W_0.$$

Então,

$$(6) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0,$$

$$(7) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)F(z)] = w_0W_0,$$

e, se $W_0 \neq 0$,

$$(8) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}.$$

Este teorema fundamental pode ser estabelecido diretamente da definição (Sec. 12) do limite de uma função de uma variável complexa. Mas, com auxílio do Teorema 1, ele decorre quase que imediatamente de teoremas sobre limites de funções reais de duas variáveis reais.

Considere, por exemplo, a demonstração da propriedade (7).

Escrevemos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \\ z_0 = x_0 + iy_0, \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad W_0 = U_0 + iV_0.$$

Então, de acordo com as hipóteses (5) e o Teorema 1, os limites, quando (x, y) tende para (x_0, y_0) , de u, v, U e V existem e têm os valores u_0, v_0, U_0 e V_0 , respectivamente. As partes real e imaginária da função

$$f(z)F(z) = uU - vV + i(uV + vU),$$

portanto, têm os limites $(u_0U_0 - v_0V_0)$ e $(u_0V_0 + v_0U_0)$, em vista de teoremas sobre limites de somas e produtos de funções. Assim, a função $f(z)F(z)$ tem o limite

$$u_0U_0 - v_0V_0 + i(u_0V_0 + v_0U_0),$$

que é igual a w_0W_0 , e a afirmação (7) está demonstrada.

De modo semeihante, podemos estabelecer as demonstrações de (6) e (8).

Observe, porém, que, para provar (8) diretamente da definição do limite de uma função de uma variável complexa, é necessário lançar mão de um resultado auxiliar, concernente a uma função F cujo limite W_0 é diferente de zero. É conveniente definir $F(z_0)$ como sendo W_0 . Então, existe uma vizinhança de z_0 tal que $|F(z)|$ supera certa constante positiva para todos os z nessa vizinhança. Isto pode ser visto assim: seja δ_0 um valor de δ que corresponde ao valor $\frac{1}{2}|W_0|$ de ϵ . Então,

$$(9) \quad |F(z) - W_0| < \frac{1}{2}|W_0| \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| < \delta_0.$$

Deixamos como exercício mostrar que, em consequência disso,

$$(10) \quad |F(z)| > \frac{1}{2}|W_0| \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| < \delta_0.$$

Em particular, $F(z) \neq 0$ para qualquer valor de z nessa vizinhança de z_0 .

Da definição do limite temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0,$$

visto que podemos tomar $\delta = \epsilon$ quando $f(z) = z$. Isto e a afirmação (7) sobre o limite do produto nos permitem concluir, por indução, que

$$(11) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

onde z_0 é um número complexo qualquer. Também, o limite de uma constante é essa constante. Em vista do teorema 2, então, o limite de um polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

é o valor desse polinômio em z_0 , para todo número z_0 :

$$(12) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0).$$

EXERCÍCIOS

1. Descreva o domínio de definição da função

$$g(z) = \frac{y}{x} + \frac{1}{1-y}i.$$

Mostre que $g(z) = f_5(z)$ para todo z no domínio de definição da função f_5 , descrita na Sec. 10.

2. Sejam b, c e z_0 constantes complexas. Usando a definição do limite (Sec. 12), prove que

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} c = c$; (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (bz + c) = bz_0 + c$;
- (c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$; (d) $\lim_{z \rightarrow z_0} \Re(z) = \Re(z_0)$;
- (e) $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$; (f) $\lim_{z \rightarrow 1-i} |z + i(2x + y)| = 1 + i$.

3. Prove a afirmação (6) no Teorema 2, (a) usando o Teorema 1 e propriedades de limites de funções reais; (b) diretamente da definição (Sec. 12) do limite de uma função.

4. Mostre que a condição (10) decorre da condição (9).

5. Sejam n um inteiro positivo, P e Q polinômios com $Q(z_0) \neq 0$. Usando o Teorema 2 e limites já estabelecidos, ache

$$(a) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n} \quad (z_0 \neq 0); \quad (b) \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}; \quad (c) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Resp. (a) $1/z_0^n$; (b) 0; (c) $P(z_0)/Q(z_0)$.

14. Continuidade. Uma função f é *contínua* num ponto z_0 se, e somente se todas as três condições seguintes são satisfeitas:

- (1) $f(z_0)$ existe,
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe,
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Essas condições, por si, já implicam que $f(z)$ está definida numa vizinhança do ponto z_0 . Exige-se uma modificação natural desta definição quando se deseja definir a continuidade de uma função num ponto da fronteira da região em que a função está definida. Suponhamos que $f(z)$ seja definida numa região que se estende até

uma curva C inclusive, mas não além de C . Então, f é contínua num ponto z_0 da curva C se, e somente se as condições (2) e (3) são satisfeitas, onde, neste caso, o limite é do interior da região, isto é, a vizinhança $|z - z_0| < \delta$, usada ao definir o limite, é substituída pela intersecção da vizinhança com a região.

Como consequência dos teoremas sobre limites, se duas funções são contínuas, sua soma e seu produto também o são, e seu quociente é contínuo, exceto nos pontos z , para os quais o denominador se anula.

De acordo com a fórmula (12), Sec. 13, todo polinômio em z é contínuo em cada ponto. O quociente de dois polinômios é contínuo nos pontos para os quais o denominador é diferente de zero.

Do Teorema 1, Sec. 13, segue-se que

$$(4) \quad f = u + iv \text{ é contínua se, e somente se, } u \text{ e } v \text{ são contínuas.}$$

Assim, podemos deduzir propriedades de funções contínuas de z a partir de propriedades de funções contínuas u e v , de x e y . Por exemplo, se f é uma função contínua de z em todos os pontos de uma região fechada R , então u e v são contínuas em R e, portanto, são limitadas em R ; consequentemente f é limitada em R , isto é, existe um número positivo M tal que

$$|f(z)| < M \quad \text{para todo } z \text{ em } R.$$

De acordo com (4), $xy^2 + i(2x - y)$ é contínua em todos os pontos z , pois os polinômios xy^2 e $2x - y$, em x e y , são funções contínuas, em todos os pontos (x, y) , das variáveis reais x e y . Da mesma maneira, $e^x + i \operatorname{sen}(xy)$ é contínua em todos os pontos z , em virtude da continuidade das funções em questão: exponencial, seno e polinômio xy .

A condição (3) pode ser escrita como segue. Para cada número positivo ϵ existe um número δ tal que

$$(5) \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| < \delta.$$

O número δ que corresponde a ϵ pode também depender de z_0 . Mas, se f é contínua em todos os pontos de uma região fechada R , então f é uniformemente contínua em R , isto é, para cada ϵ existe um número δ , independente de z_0 , tal que a condição (5) é satisfeita simultaneamente para todo ponto z_0 em R . Isto decorre de (4) e da propriedade correspondente de funções reais u e v .

Seja D o domínio de definição de uma função f . Considere uma função g , definida numa vizinhança N de um ponto z_0 , tal que todos os valores $g(z)$, com z em N , pertençam a D . Então, $f[g(z)]$ é definida quando z está em N . Se g é contínua em z_0 e se f é contínua no ponto $g(z_0)$, então a função composta, $f(g)$, é contínua em z_0 . Em síntese, função contínua de função contínua é contínua. Isto decorre da condição (5), da definição de continuidade. Para cada ϵ existe um número δ' tal que

$$|f[g(z)] - f[g(z_0)]| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |g(z) - g(z_0)| < \delta';$$

mas para δ' existe um número δ tal que a última desigualdade se verifica sempre que $|z - z_0| < \delta$.

Observe que a função composta $f(g)$ não inclui somas, produtos ou quocientes de duas funções, uma vez que f e g aqui são funções de uma só variável complexa. Condições para a continuidade dessas combinações de funções já foram dadas no começo desta seção.

15. A Derivada. Seja z um ponto arbitrário de uma vizinhança de um ponto fixo z_0 , onde essa vizinhança está contida no domínio de definição de uma certa função f . Vamos escrever $\Delta z = z - z_0$ e considerar Δz como nossa variável complexa. A derivada f' , ou df/dz , de f em z_0 é, então, definida pela fórmula

$$(1) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

se o limite existe. Isto é, se o número complexo $f'(z_0)$, derivada, existe, então, para cada número positivo ϵ existe um número δ tal que

$$(2) \quad \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |\Delta z| < \delta.$$

Se $f(z) = z^2$, por exemplo, então $f'(z_0) = 2z_0$ em qualquer ponto z_0 , pois

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0,$$

visto que $2z_0 + \Delta z$ é um polinômio em Δz .

Em vista da fórmula (1), quando $f'(z_0)$ existe, temos

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = 0;$$

isto é,

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Assim, f é necessariamente contínua em todo ponto z_0 onde sua derivada existe. A continuidade da função, porém, não implica na derivabilidade da mesma, como mostra o seguinte exemplo.

A função $w = |z|^2$ é contínua em todo ponto. Mostraremos que sua derivada existe somente no ponto $z = 0$. Para esta função o quociente de diferença fica

$$(4) \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)(\bar{z}_0 + \bar{\Delta z}) - z_0 \bar{z}_0}{\Delta z} \\ = \bar{z}_0 + \bar{\Delta z} + z_0 \frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z}$$

Quando $z_0 = 0$, $\Delta w/\Delta z = \bar{\Delta z}$ e seu limite é zero, isto é,

$$\frac{d}{dz} |z|^2 = 0 \quad \text{em } z = 0.$$

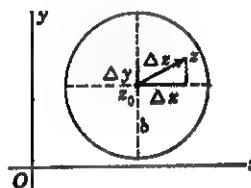


Fig. 13

Suponha $z_0 \neq 0$. Se w' existisse, $\Delta w/\Delta z$ teria o limite (único) w' , independente de como Δz tendesse para zero. Se Δz é real, $\Delta z = \Delta x$ na figura 13; então $\bar{\Delta z} = \Delta z$ e, de acordo com (4), o limite teria que ser $\bar{z}_0 + z_0$. Por outro lado, se Δz é restrito ao diâmetro vertical da região $0 < |\Delta z| < \delta$, $\Delta z = i\Delta y$, então $\bar{\Delta z} = -\Delta z$, e o limite seria $\bar{z}_0 - z_0$. Como $z_0 \neq 0$, o limite não pode existir e, portanto, $|z|^2$ não possui derivada em z_0 .

16. Fórmulas de Derivação. A definição da derivada $f'(z)$ é idêntica, em forma, à da derivada de função real de uma variável real. Existe, porém, uma diferença significante entre as duas definições: o limite na definição de $f'(z)$ é de dimensão dois. Por esta razão, muitos resultados do cálculo de variáveis reais não se aplicam ao cálculo de variáveis complexas. Como pequena ilustração, notemos que a função $|x|^2$ possui a derivada $2x$ para todo real x ; mas acabamos de mostrar acima que a derivada de $|z|^2$ existe somente no ponto $z = 0$.

As fórmulas básicas de derivação abaixo podem ser deduzidas da definição da derivada e dos teoremas sobre limites exatamente como no caso de variáveis reais. Seja c uma constante complexa e w uma função cuja derivada $w'(z)$ existe. Então,

$$(1) \quad \frac{d}{dz} (c) = 0, \quad \frac{d}{dz} (z) = 1,$$

$$(2) \quad \frac{d}{dz} (cw) = c \frac{dw}{dz}.$$

Se as derivadas $w'_1(z)$ e $w'_2(z)$ de duas funções w_1 e w_2 existem, então

$$(3) \quad \frac{d}{dz} (w_1 + w_2) = w'_1(z) + w'_2(z),$$

$$(4) \quad \frac{d}{dz} (w_1 w_2) = w_1(z) w'_2(z) + w_2(z) w'_1(z), \\ \text{e, se } w_2(z) \neq 0,$$

$$(5) \quad \frac{d}{dz} \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2(z) w'_1(z) - w_1(z) w'_2(z)}{[w_2(z)]^2}.$$

Para a função composta $w_1(w_2)$, onde $w'_1(t)$ existe no ponto $t = w_2(z)$ e $w'_2(z)$ existe,

$$(6) \quad \frac{d}{dz} [w_1(w_2)] = \frac{dw_1}{dw_2} \frac{dw_2}{dz}.$$

Se n é um inteiro positivo, então, em todo ponto z ,

$$(7) \quad \frac{d}{dz} (z^n) = nz^{n-1},$$

e esta fórmula permanece válida quando n é um inteiro negativo se $z \neq 0$.

Como exemplo, se $w_1 = z^5$ e $w_2 = 2z + 1$ na fórmula (6), então

$$\frac{d}{dz} (2z + 1)^5 = \frac{d}{dz} (w_2^5) = 5w_2^4 \frac{dw_2}{dz} = 10(2z + 1)^4.$$

Se escrevemos

$$\Delta w_1 = w_1(z + \Delta z) - w_1(z), \quad \Delta w_2 = w_2(z + \Delta z) - w_2(z),$$

e $f(z) = w_1(z)w_2(z)$, o quociente de diferença para a fórmula (4) se reduz à forma

$$(8) \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = w_1 \frac{\Delta w_2}{\Delta z} + w_2 \frac{\Delta w_1}{\Delta z} + \Delta w_2 \frac{\Delta w_1}{\Delta z}.$$

Como $w'_1(z)$ e $w'_2(z)$ existem, w_2 é contínua no ponto z e, por conseguinte, $\lim \Delta w_2 = 0$ quando $\Delta z \rightarrow 0$. A demonstração da fórmula (4) se completa aplicando os teoremas de limite para somas e produtos à expressão (8) para $\Delta f/\Delta z$.

A dedução completa da fórmula (6), para a derivada de função composta $w_1(w_2)$, não é tão simples. Se a função w_2 é constante, a fórmula se reduz à primeira das fórmulas (1). Seja w_2 não constante. No lugar de z escrevemos z_0 para indicar o ponto no qual w'_2 é suposta existir, e vamos denotar o número complexo $w_2(z_0)$ por t_0 . Supõe-se então, também, a existência de $w'_1(t_0)$; consequentemente, a função $w_1(t)$ é definida em todos os pontos de alguma vizinhança N de t_0 , digamos, $|t - t_0| < \delta_1$. Como w_2 deve ser contínua em z_0 , existe um número δ_2 tal que

$$(9) \quad |\Delta w_2| < \delta_1 \quad \text{sempre que} \quad |\Delta z| < \delta_2,$$

onde $\Delta w_2 = w_2(z_0 + \Delta z) - t_0$, isto é, os pontos $w_2(z_0 + \Delta z)$ permanecem na vizinhança N quando $|\Delta z| < \delta_2$.

Toda vizinhança de z_0 contém pontos $z_0 + \Delta z$ tais que $\Delta w_2 \neq 0$, uma vez que w_2 não é constante. Para os valores de Δz tais que $\Delta w_2 \neq 0$, escrevemos

$$(10) \quad \frac{\Delta w_1}{\Delta z} = \frac{\Delta w_1}{\Delta w_2} \frac{\Delta w_2}{\Delta z},$$

onde $\Delta w_1 = w_1[w_2(z_0 + \Delta z)] - w_1(t_0)$. O limite, quando $\Delta z \rightarrow 0$, do produto no segundo membro de (10) existe se $\Delta w_1/\Delta w_2$ tem um limite quando $\Delta z \rightarrow 0$, já que o limite do segundo fator é $w_2'(z_0)$. Da existência de $w_1'(t_0)$, como limite único, segue-se que, para cada número positivo ϵ , existe um número δ_3 tal que

$$(11) \quad \left| \frac{\Delta w_1}{\Delta w_2} - w_1'(t_0) \right| < \epsilon$$

sempre que $|\Delta w_2| < \delta_3$. Mas, de acordo com a condição de continuidade (9), existe um número δ ($\delta < \delta_3$) tal que $|\Delta w_2| < \delta_3$ sempre que $|\Delta z| < \delta$. Assim, a condição (11) é satisfeita sempre que $|\Delta z| < \delta$, isto é, $\Delta w_1/\Delta w_2$ tem o limite $w_1'(t_0)$ quando $\Delta z \rightarrow 0$. De (10) segue-se que $dw_1/dz = w_1'(t_0)w_2'(z_0)$; esta é uma forma alternada da fórmula (6).

EXERCÍCIOS

1. Usando resultados obtidos nesta secção, mostre que a derivada de um polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

existe em todos os pontos e que $P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$.

2. Mostre que o quociente $P(z)/Q(z)$ de dois polinômios possui a derivada em todo ponto z tal que $Q(z) \neq 0$ (ver Exercício 1).

3. Usando resultados desta secção, ache $f'(z)$ quando

$$(a) f(z) = 3z^3 - 2z + 4; \quad (b) f(z) = (1 - 4z^2)^3;$$

$$(c) f(z) = \frac{z-1}{2z+1} \quad (z \neq -\frac{1}{2}); \quad (d) f(z) = z^2(1+z^{-2})^4 \quad (z \neq 0).$$

4. Deduza a fórmula (5) desta secção.

5. Usando a indução ou a fórmula binomial (Exercício 18, Sec. 3), deduza a fórmula (7) quando n é inteiro positivo.

6. Deduza a fórmula (7) quando n é inteiro negativo e $z \neq 0$.

7. Prove, diretamente da definição da derivada, que $f'(z_0) = -1/z_0^2$ quando $f(z) = 1/z$ e $z_0 \neq 0$.

8. Aplicando a definição da derivada, mostre que, se $f(z) = \Re(z)$, então $f'(z)$ não existe em nenhum ponto.

9. Mostre que a função \bar{z} não é derivável em nenhum ponto.

10. Diga se a função $\Im(z)$ tem derivada em algum ponto.

17. As Condições de Cauchy-Riemann. Suponha que uma função tenha derivada em z_0 . Escrevamos $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$(1) \quad \begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y), & f'(z_0) &= a + ib, \\ \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0), & \Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0), \end{aligned}$$

e Δv para o acréscimo correspondente em $v(x,y)$. Então,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = a + ib,$$

e, em vista do Teorema 1, Sec. 13, vem

$$(2) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Re \left(\frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} \right) = a, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Im \left(\frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} \right) = b.$$

Em particular, quando $\Delta y = 0$, isto é, quando $\Delta z = \Delta x$ (Fig. 13), os limites acima se reduzem a limites de funções de uma só variável Δx , decorrendo daí que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} &= a, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} &= b, \end{aligned}$$

isto é, $\partial v/\partial x$ e $\partial u/\partial x$ existem no ponto (x_0, y_0) e

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b \quad \text{em } (x_0, y_0).$$

Da mesma maneira, quando $\Delta x = 0$ ($\Delta z = i\Delta y$), os limites em (2) se reduzem a

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} &= a, \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} &= b. \end{aligned}$$

Assim, as derivadas parciais em relação a y existem e

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b \quad \text{em } (x_0, y_0).$$

De acordo com as fórmulas (3) e (5), temos, no ponto z_0 ,

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Estas equações são as condições de *Cauchy-Riemann*, assim chamadas em homenagem ao matemático francês A. L. Cauchy (1789–1857), que as descobriu e usou, e ao matemático alemão G. F. B. Riemann (1826–1866), que as tornou fundamentais na teoria das funções analíticas.

Como $f'(z_0) = a + ib$, as fórmulas (3) e (4) nos fornecem duas expressões úteis para a derivada de f , a saber:

$$(6) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

no ponto $z = z_0$. O seguinte teorema, então, está estabelecido.

Teorema. Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f = u + iv$ existe num ponto z , então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a x e y ; de cada uma das partes u e v , existem nesse ponto e satisfazem às condições de Cauchy-Riemann.(5). Também, $f'(z)$ é dada em termos dessas derivadas parciais pela fórmula (6).

Como ilustração, consideremos a função

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Já provamos que sua derivada existe em todos os pontos; de fato, $f'(z) = 2z$. Assim, as condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas em todos os pontos. Para verificar isto, notemos que $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$, e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Também, de acordo com (6), temos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2yi = 2z.$$

O teorema acima apresenta condições *necessárias* para a existência de $f'(z)$. Mostra, por exemplo, que em cada ponto z tal que $z \neq 0$ a função $|z|^2$ não pode ter derivada. Neste caso, $u = x^2 + y^2$ e $v = 0$. Embora as derivadas parciais existam sempre, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, enquanto $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, as condições de Cauchy-Riemann não são satisfeitas a menos que $x = y = 0$. Observe que o teorema não garante a existência da derivada de $|z|^2$ em $z = 0$; mas o teorema 1 na secção seguinte o fará.

18. Condições Suficientes. Dão-se a seguir condições sobre u e v que garantem a existência da derivada $f'(z)$.

Teorema 1. Sejam u e v funções reais e univalentes de x e y as quais, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, são contínuas num ponto (x_0, y_0) . Se essas derivadas parciais satisfazem às condições de Cauchy-Riemann nesse ponto, então a derivada $f'(z_0)$ da função $f = u + iv$ existe, sendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$.

Como u e suas derivadas parciais primeiras são contínuas em (x_0, y_0) , todas elas estão definidas numa certa vizinhança desse ponto. Quando $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

é um ponto na vizinhança, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ são os valores das derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) , e onde ϵ_1 e ϵ_2 se aproximam de zero quando Δx e Δy tendem ambos para zero. A fórmula acima para Δu é estabelecida no cálculo avançado em conexão com a definição da diferencial da função u .

Uma fórmula análoga pode ser escrita para Δv . Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i \Delta v \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \\ &\quad + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y \right). \end{aligned}$$

Passemos a usar a hipótese de que as condições de Cauchy-Riemann estejam satisfeitas no ponto (x_0, y_0) . Podemos substituir $\frac{\partial u}{\partial y}$ por $-\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$, e escrever a fórmula acima na forma

$$\Delta f = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y,$$

onde δ_1 e δ_2 tendem para zero quando Δz se aproxima de zero ($\Delta z = \Delta x + i \Delta y$). Segue-se, então, que

$$(1) \quad \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Como $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ e $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, vem

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1,$$

de modo que os dois últimos termos no segundo membro da fórmula (1) tendem para zero com Δz . Portanto, no ponto z_0 ,

$$(2) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x};$$

isto é, a derivada $f'(z_0)$ existe, e o teorema está demonstrado.

Como ilustração do Teorema 1, as funções $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$ são contínuas em todos os pontos assim como suas derivadas parciais de primeira ordem. É fácil ver que as derivadas parciais satisfazem às condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos. Conseqüentemente, a derivada $f'(z)$ da função

$$(3) \quad f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

existe em todos os pontos. Como $\partial u / \partial x = u$ e $\partial v / \partial x = v$, segue-se, da fórmula (2), que

$$(4) \quad f'(z) = f(z).$$

De novo, sejam u e v duas funções satisfazendo a todas as hipóteses enunciadas no Teorema 1; mas agora suponhamos que $z_0 \neq 0$. Usando a regra de cadeia para derivação, podemos mostrar que u e v , que já atendem, em z_0 , às condições de Cauchy-Riemann (5), Sec. 17, satisfazem, nas coordenadas polares

$$(5) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

às condições

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad (r \neq 0)$$

nesse ponto. Aqui θ é medido em radianos. Reciprocamente, as condições (6) implicam nas condições (5), Sec. 17. Detalhes são deixados para o exercício 7 abaixo.

As equações (6) são as *condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares*. Elas são úteis em conexão com a seguinte forma alternada do Teorema 1.

Teorema 2. Sejam $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ reais e uni-valentes em cada ponto z de uma vizinhança de um ponto (r_0, θ_0) as quais, juntamente com suas derivadas parciais primeiras em relação a r e θ , são funções contínuas de z em (r_0, θ_0) , satisfazendo às condições de Cauchy-Riemann (6) em coordenadas polares nesse ponto, onde $r_0 \neq 0$. Então, a derivada $f'(z_0)$ da função $f = u + iv$ existe,

$$\text{onde } z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

e além disso, no ponto $z = z_0$,

$$(7) \quad f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

O método empregado acima para demonstrar o Teorema 1 pode ser usado novamente aqui. Os pormenores não são tão simples neste caso devido à natureza da fórmula para Δz em termos de Δr e $\Delta \theta$. A demonstração é esboçada nos exercícios 8 a 10 abaixo.

EXERCÍCIOS

1. Usando o teorema da Sec. 17, mostre que $f'(z)$ não existe em nenhum ponto se $f(z)$ é

(a) \bar{z} ; (b) $z - \bar{z}$; (c) $2x + xy^2i$; (d) $e^x(\cos y - i \sin y)$.

2. Use o Teorema 1 para mostrar que $f'(z)$ e sua derivada $f''(z)$ existem em todos os pontos, e ache $f'(z)$ e $f''(z)$ usando a fórmula (2), quando

(a) $f(z) = iz + 2$; (b) $f(z) = e^{-z}(\cos y - i \sin y)$;
(c) $f(z) = z^3$; (d) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

Resp. (b) $f'(z) = -f(z)$, $f''(z) = f(z)$; (d) $f''(z) = -f(z)$.

3. A partir dos resultados obtidos nas Secs. 17 e 18, determine onde $f'(z)$ existe e ache seu valor, quando

$$(a) f(z) = \frac{1}{z}; \quad (b) f(z) = z^2 + iy^2; \quad (c) f(z) = z \, s(z).$$

Resp. (a) $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ ($z \neq 0$); (b) $f'(x + iy) = 2x$; (c) $f'(0) = 0$.

4. Seja $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, onde

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi),$$

usando o Teorema 2, mostre que $f'(z)$ existe em todos os pontos, exceto nos pontos do semi-eixo real não negativo, e que $f'(z) = 1/(2f(z))$.

5. Se $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$, então $\partial u / \partial x + i \partial v / \partial x = 3x^2$. Por que $3x^2$ representa $f'(z)$ somente no ponto $z = i$?
6. A hipótese, na Sec. 17, de que $f'(z_0) = a + ib$, pode ser enunciada como sendo a condição: para cada número positivo ϵ existe um número δ tal que

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - a - ib \right| < \epsilon \quad \text{sempre que } 0 < |\Delta z| < \delta.$$

Use esta condição para deduzir as fórmulas (3) e (4), Sec. 17.

7. Sob as transformações de coordenadas (5) e as condições de continuidade enunciadas no Teorema 1, obtenha as derivadas parciais de u e v em relação a r e θ em termos das derivadas em relação a x e y ; prove, então, que, no ponto z_0 ($z_0 \neq 0$), as condições (6) são satisfeitas quando as condições (5), Sec. 17, se verificam, e reciprocamente.

8. Para simplificar as fórmulas aqui, escrevemos $E(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$; então, a forma polar de z é $z = rE(\theta)$. Sendo $\Delta z = (r_0 + \Delta r)E(\theta_0 + \Delta \theta) - r_0E(\theta_0)$, onde $r_0 > 0$, deduza as fórmulas

$$\Delta z = E(\theta_0 + \Delta \theta)[\Delta r + ir_0 \sin \Delta \theta + r_0(1 - \cos \Delta \theta)] \\ = E(\theta_0 + \Delta \theta)[\Delta r + ir_0 \Delta \theta + r_0 \Delta \theta h(\Delta \theta)],$$

$$\text{onde } h(\Delta \theta) = \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\Delta \theta} - i \frac{\Delta \theta - \sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} h(\Delta \theta) = 0.$$

9. Quando $r_0 > 0$ no exercício 8, prove que $|\Delta \theta / \Delta z|$ é limitado para todos Δr e $\Delta \theta$ quando $|\Delta \theta|$ é suficientemente pequeno; também, escreva $|\Delta z|^2$ em termos de Δr e $\Delta \theta$ e prove que $|\Delta r / \Delta z|$ é limitado quando $|\Delta r| < r_0$.

10. Demonstre o Teorema 2 deduzindo primeiro, com o auxílio das fórmulas (6) e dos resultados obtidos nos exercícios 8 e 9, as fórmulas:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\Delta r + i r_0 \Delta \theta) + \sigma_1 \Delta r + \sigma_2 \Delta \theta \\ &= E(-\theta_0 - \Delta \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Delta z + \sigma_1 \Delta r + \sigma_2 \Delta \theta,\end{aligned}$$

onde $\partial u/\partial r$ e $\partial v/\partial r$ são calculadas em z_0 e

$$\sigma_n \rightarrow 0 \quad \text{quando } \Delta z \rightarrow 0 \quad (n = 1, 2, 3).$$

19. Funções Analíticas. Uma função f da variável complexa z se diz *analítica num ponto* z_0 , se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo ponto z de uma vizinhança de z_0 . f é *analítica num domínio* do plano- z se ela é analítica em todo ponto desse domínio. Os termos “regular” e “holomorfa” são, às vezes, introduzidos para indicar analiticidade em domínios de certas classes.

A função $|z|^2$, por exemplo, não é analítica em nenhum ponto, visto que sua derivada existe somente no ponto $z = 0$, e não numa vizinhança.

Uma função *inteira* é aquela que é analítica em todo ponto do plano- z , isto é, no plano inteiro. Mostramos (Exercício 1, Sec. 16) que a derivada de qualquer polinômio em z existe em todo ponto; portanto, *todo polinômio*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

é uma função *inteira*.

Se uma função é analítica em algum ponto de cada vizinhança de um ponto z_0 , exceto no próprio ponto z_0 , então z_0 é chamado *ponto singular*, ou *singularidade* da função.

Por exemplo, vimos que, se

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{então} \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad (z \neq 0).$$

Assim, f é analítica em todo ponto, exceto no ponto $z = 0$, onde ela não é contínua, de modo que $f'(0)$ não pode existir. O ponto $z = 0$ é ponto singular. Por outro lado, a nossa definição não assinala, em absoluto, pontos singulares para a função $|z|^2$, já que esta função não é analítica em nenhum ponto.

Uma condição necessária, mas jamais suficiente, para que uma função seja analítica num domínio D , é que a função seja contínua em D . As condições de Cauchy-Riemann também são necessárias, mas não suficientes. Dois conjuntos de condições suficientes para analiticidade em D ficam sendo dados pelos Teoremas 1 e 2, Sec. 18, desde que as hipóteses nesses teoremas sejam satisfeitas em todo ponto de D . Outros conjuntos práticos de condições suficientes decorrem, entretanto, das condições de validade das fórmulas de derivação (Sec. 16), da seguinte maneira.

As derivadas da soma e do produto de duas funções existem onde as funções possuem derivadas. Assim, se duas funções são analíticas num domínio D , então sua soma e seu produto são ambos analíticos em D . Analogamente, seu quociente é analítico em D desde que a função no denominador não se anule em nenhum

ponto de D . Em particular, o quociente P/Q de dois polinômios é analítico em qualquer domínio no qual $Q(z) \neq 0$.

Seja g uma função analítica de z num domínio D_1 , e seja R o contradomínio de $g(z)$ para os z em D_1 . Então, se f é analítica num domínio D_2 contendo R , segue-se, das condições de validade da fórmula de derivação (6), Sec. 16, que a função composta $f[g(z)]$ é analítica em D_1 . Em resumo, *função analítica de função analítica é analítica*.

Como ilustração, a função $g(z) = 1 + z^2$ é inteira. De acordo com o exercício 4, Sec. 18, a função

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

é analítica no seu domínio de definição. Em particular, ela é analítica no semiplano superior $\Im(z) > 0$, exemplo do domínio D_2 acima. Como $\Im[g(z)] = 2xy$, o contradomínio de g é restrito a esse semiplano se $xy > 0$. Assim, a função composta

$$f[g(z)] = (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (x > 0, y > 0)$$

é analítica no domínio D_1 consistindo do quadrante $x > 0, y > 0$ do plano- z .

Observemos também que *função inteira de função inteira é inteira*.

20. Funções Harmônicas. Seja a função $f = u + iv$ analítica num domínio do plano- z . Então, em todo ponto do domínio

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

e, portanto,

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

desde que estas segundas derivadas existam. Mostraremos no Cap. 5 (Sec. 52), que, quando f é analítica, as derivadas parciais de u e v de todas as ordens existem e são funções contínuas de x e y . Admitindo isto por ora, segue-se que as duas derivadas mistas nas equações (2) são iguais e, portanto, que

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em todos os pontos do domínio.

A equação (3) é a equação diferencial parcial de *Laplace* em duas variáveis independentes x e y . Qualquer função, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, que satisfaz à equação de Laplace é chamada *função harmônica*.

A função u , bem como v , é harmônica quando a função $f = u + iv$ é analítica. Podemos mostrar isto derivando a primeira das equações (1) em relação a y , e a segunda em relação a x e subtraindo membro a membro para obtermos a equação

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

As funções u e v se dizem *funções harmônicas conjugadas* se a função $f = u + iv$ é analítica. O uso da palavra *conjugado* acima é diferente daquele empregado na definição de \bar{z} .

Quando uma das duas funções harmônicas conjugadas é dada, as equações de Cauchy-Riemann (1) permitem determinar a outra. Vamos ilustrar um método para obter a conjugada harmônica de uma função harmônica dada.

É fácil ver, pela substituição direta na equação de Laplace, que a função

$$u = y^3 - 3x^2y$$

é harmônica. Para achar sua conjugada harmônica v , notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

e daí, usando uma das equações de Cauchy-Riemann, podemos concluir que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy.$$

Integrando esta equação em relação a y com x fixo, vem

$$v = -3xy^2 + \phi(x),$$

onde $\phi(x)$ é, no momento, uma função arbitrária de x . Mas, como $\partial v / \partial x = -\partial u / \partial y$, ϕ deve ser tal que

$$-3y^2 + \phi'(x) = -3y^2 + 3x^2;$$

portanto $\phi'(x) = 3x^2$ e $\phi(x) = x^3 + c$, onde c é constante arbitrária. Assim, a conjugada harmônica da função $u = y^3 - 3x^2y$ é

$$v = -3xy^2 + x^3 + c.$$

A função correspondente $f = u + iv$ é

$$(5) \quad f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + ic.$$

É fácil verificar que

$$f(z) = i(z^3 + c).$$

Esta forma é sugerida pelo fato de a fórmula (5) ficar

$$f(x) = i(x^3 + c).$$

quando se faz $y = 0$.

Mais adiante (Sec. 78) mostraremos que, para cada função harmônica u , existe uma função harmônica conjugada v . Usaremos integral de linha para escrever uma fórmula explícita para v em termos de u .

EXERCÍCIOS

1. Prove que cada uma das seguintes funções é inteira:

- (a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$;
- (b) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$;
- (c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$;
- (d) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}(\cos y - i \sin y)$.

2. Diga por que cada uma das seguintes funções não é analítica em nenhum ponto:

$$(a) f(z) = xy + iy; (b) f(z) = e^y(\cos x + i \sin x).$$

3. Determine os pontos singulares de cada uma das seguintes funções e diga por que a função é analítica em todos os pontos, exceto nesses pontos:

$$(a) \frac{2z+1}{z(z^2+1)}; (b) \frac{z^3+i}{z^2-3z+2}; (c) (z+2)^{-1}(z^2+2z+2)^{-1}.$$

Resp. (a) $z = 0, \pm i$; (c) $z = -2, -1 \pm i$.

4. Sendo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, mostre que a função

$$F(z) = \log r + i\theta \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

é analítica no domínio de definição indicado e que $F'(z) = 1/z$ aí. Diga, então, por que a função composta $F(2z + i - 2)$ é função analítica de z no domínio $x > 1$.

5. Seja $u + iv$ analítica. Diga porque $-v + iu$ também é analítica. Mostre que, por conseguinte, se u e v são funções harmônicas conjugadas, então $u - v$ também o são. No exemplo dado na Sec. 20, portanto, $3xy^2 - x^3 + C$ é outra conjugada harmônica da função $y^3 - 3x^2y$.

6. Mostre que u é harmônica em algum domínio e acha uma conjugada harmônica v , quando

- (a) $u = 2x(1-y)$;
- (b) $u = 2x - x^3 + 3xy^2$;
- (c) $u = \sin x \sin y$;
- (d) $u = y(x^2 + y^2)^{-1}$.

Resp. (a) $v = x^2 - y^2 + 2y$; (c) $v = -\sin x \cos y$.

7. Sejam u e v são funções harmônicas conjugadas. Suas curvas de nível são famílias de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$. Mostre que estas famílias de curvas são ortogonais. Mais precisamente, mostre que, em cada ponto (x_0, y_0) comum a duas curvas $u = c_1$ e $v = c_2$, as tangentes (ou normais) às duas curvas são perpendiculares, desde que $\partial u / \partial x$ e $\partial u / \partial y$ não se anulem simultaneamente no ponto, isto é, desde que $f'(z_0) \neq 0$ onde $f = u + iv$ e $z_0 = x_0 + iy_0$.

8. Mostre que, quando

$$f(z) = u + iv = z^2,$$

as famílias de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ são como mostra a figura 14. Observe a ortogonalidade destas curvas demonstrada no exercício 7. As curvas $u = 0$ e $v = 0$ se encontram na origem e não são ortogonais uma à outra. Por que este fato não contradiz o resultado do exercício 7?

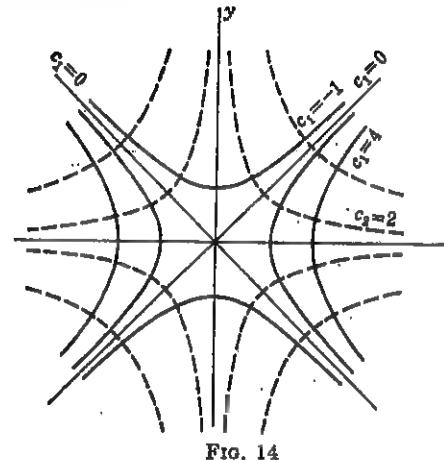


FIG. 14

9. Esboce as famílias de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ quando $f(z) = 1/z$ e observe a ortogonalidade demonstrada no exercício 7.

10. Esboce as famílias de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ quando

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

e observe como os resultados do exercício 7 são ilustrados aqui.

11. Resolva o exercício 9 usando coordenadas polares.

12. Seja f uma função analítica num domínio D que não contém o ponto $z = 0$. Sendo $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, use as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares para mostrar que, em D , tanto u como v satisfazem à equação de Laplace em coordenadas polares,

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\theta \text{ em radianos}),$$

supondo que todas as derivadas parciais de u e v até a segunda ordem sejam contínuas.

13. No domínio $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$, mostre que a função $u = \log r$ é harmônica (Exercício 12) e ache sua conjugada harmônica.

Resp. $v = \theta + c$.

14. Sendo uma função $f = u + iv$ e a sua conjugada complexa $\bar{f} = u - iv$ ambas analíticas num domínio, mostre que f é constante.

15. Sendo f analítica num domínio, mostre que o seu valor absoluto $|f|$ não pode ser constante a menos que f o seja.

16. Explique por que a afirmação final na Sec. 19, de que a função composta $f(g)$ de duas funções inteiras é inteira, é verdadeira sem qualquer qualificação. Também, diga por que uma *combinação linear* $bf + cg$, onde b e c são constantes complexas, de funções inteiras f e g é inteira.

CAPÍTULO 3

Funções Elementares

21. A Função Exponencial. Definimos a função exponencial, \exp , em termos de funções reais, pela equação

$$(1) \quad \exp z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

onde $z = x + iy$ e o número y é usado como medida em *radiano* do ângulo na definição dos números $\cos y$ e $\sin y$. O símbolo e^z também é usado para indicar $\exp z$; mas, no momento, este símbolo não pode representar a z -ésima potência da base e do logaritmo natural, pois, até agora, só foram introduzidos os expoentes reais. Observe que $\exp z$ é *univalente* para cada z .

Como justificativa da escolha da definição (1), notemos primeiro que, no caso $y = 0$, a definição se reduz à da função exponencial real, $\exp x = e^x$. No caso $x = 0$, a equação (1) fica

$$(2) \quad \exp(iy) = \cos y + i \sin y.$$

Esta definição de $\exp(iy)$, ou e^{iy} , é natural se esperamos que a representação em série de Maclaurin de e^t (t real) se aplique quando t é substituído por iy ; a série para $\exp(iy)$, então, pode ser escrita, formalmente,

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

onde $0! = 1$. As duas últimas séries aqui são as séries de Maclaurin para $\cos y$ e $\sin y$, respectivamente.

De fato, $\exp z$ é definida freqüentemente como soma de uma série de potências em z , que se reduz à série (3) quando $x = 0$. Mas, então, deveremos introduzir séries infinitas em potências de z (cap. 6), antes do estudo de funções exponenciais.

A função exponencial (1) é uma função inteira. Decorre do Teorema 1, Sec. 18, visto que as partes

$$(4) \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

e suas derivadas parciais são contínuas e satisfazem às condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos. Além disso,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u + iv,$$

isto é,

$$(5) \quad \frac{d}{dz} \exp z = \exp z.$$

As duas funções (4) são funções harmônicas conjugadas de x e y no plano todo, pois são as partes de uma função inteira (Sec. 20).

Se w é uma função analítica de z num domínio D , então a função composta $\exp w$ é uma função analítica de z em D porque a função exponencial é inteira. De acordo com a fórmula (6), Sec. 16, para a derivada de função de função, tem-se

$$(6) \quad \frac{d}{dz} \exp w = \frac{dw}{dz} \exp w,$$

quando z está em D .

22. Outras Propriedades da $\exp z$. Como $e^x > 0$ para todo número real x , para cada z nossa definição

$$(1) \quad \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

representa o número complexo $\exp z$ na forma polar

$$(2) \quad \exp z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi), \quad \text{onde } \rho = e^x, \phi = y,$$

isto é, $|\exp z| = e^x$ e y é um valor do argumento em radianos:

$$(3) \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Logo $|e^z| > 0$ para todo valor de z , o que significa que

$$(4) \quad e^z \neq 0 \quad \text{para qualquer número } z.$$

De acordo com a representação (2), para cada valor positivo de ρ existe um valor de x ($x = \log \rho$) e, independentemente, a cada ângulo ϕ corresponde um valor y ($y = \phi$). Conseqüentemente, o *contradominio da função exponencial é o plano complexo inteiro menos a origem $\rho = 0$* .

Devem existir valores de z tais que $\exp z = -1$, por exemplo. Como -1 tem a forma polar (2) onde $\rho = 1$ e $\phi = \pi \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), segue-se que $x = 0$ e $y = \pi \pm 2n\pi$, ou $z = (1 \pm 2n)\pi i$.

As leis de expoentes para a função decorrem de representação (2) de $\exp z$ em forma polar e das fórmulas (Secs. 7 e 8) para produtos, quocientes, potências e raízes de números complexos em forma polar. Escrevemos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned}\exp z_1 &= \rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) & \text{onde } \rho_1 = e^{x_1}, \phi_1 = y_1, \\ \exp z_2 &= \rho_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) & \text{onde } \rho_2 = e^{x_2}, \phi_2 = y_2.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}(\exp z_1)(\exp z_2) &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].\end{aligned}$$

Mas $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ e $x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$, portanto

$$(5) \quad (\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Da mesma maneira obtemos a fórmula

$$(6) \quad \frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2);$$

em particular, $1/\exp z = \exp(-z)$. Também, se m e n são inteiros positivos,

$$(7) \quad (\exp z)^n = \exp(nz),$$

$$(8) \quad (\exp z)^{m/n} = \exp\left[\frac{m}{n}(z + 2\pi ki)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Visto que $\exp(z + 2\pi i) = \exp z \exp(2\pi i)$ e $\exp(2\pi i) = 1$, a função exponencial é periódica com período $2\pi i$, isto é,

$$(9) \quad \exp(z + 2\pi i) = \exp z.$$

Da definição (1) podemos ver que

$$(10) \quad \exp \bar{z} = \overline{\exp z}.$$

Em termos da função exponencial, a forma polar de um número complexo, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, tem as representações convenientes

$$(11) \quad z = r \exp(i\theta) = re^{i\theta}.$$

As fórmulas para operações sobre números em forma polar também tomam formas mais simples; por exemplo, $\bar{z} = r \exp(-i\theta)$ e

$$(12) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)], \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \exp[i(\theta_1 - \theta_2)] \quad (r_2 \neq 0).$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que

$$\begin{aligned}(a) \exp 0 &= 1; & (b) \exp(2 \pm 3\pi i) &= -e^{\pm 2}; \\ (c) \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) &= i; & (d) \exp\frac{2 + \pi i}{4} &= \sqrt{e} \frac{1+i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2. Mostre que

$$\begin{aligned}(a) \exp(z + \pi i) &= -\exp z; \\ (b) \exp(-nz) &= \frac{1}{(\exp z)^n} \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

3. Quando z tem a representação polar $z = r \exp(i\theta)$, mostre que

$$(a) \bar{z} = r \exp(-i\theta); \quad (b) \exp(\log r + i\theta) = z.$$

4. Determine todos os valores de z tais que

$$(a) \exp z = -2; \quad (b) \exp z = 1 + i\sqrt{3}; \quad (c) \exp(2z - 1) = 1.$$

$$\text{Resp. (a) } z = \log 2 \pm (2n+1)\pi i; \quad (c) z = \frac{1}{2} \pm n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

5. Deduza, com o auxílio das fórmulas da Sec. 7, as leis exponenciais (6) e (7).

6. Deduza, com o auxílio das fórmulas da Sec. 8, a fórmula exponencial (8).

7. Mostre que $\exp(i\bar{z}) \neq \exp(iz)$ a menos que $z = \pm n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$

8. Simplifique $|\exp(2z + i)|$ e $|\exp(iz^2)|$, e mostre que

$$|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| \leq e^{2x} + e^{-2x}.$$

9. Mostre que $|\exp(-2z)| < 1$ se, e somente se, o ponto z se encontra no semi-plano $x > 0$.

10. (a) Mostre que se $\exp z$ é real, então $\Im(z) = \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(b) Para que conjunto de valores de z $\exp z$ é imaginário puro?

11. Examine o comportamento de (a) $\exp(x + iy)$ quando $x \rightarrow -\infty$;

(b) $\exp(2 + iy)$ quando $y \rightarrow \infty$.

12. Diga por que a função $2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z}$ é inteira.

13. Prove que $\exp \bar{z}$ não é analítica em nenhum ponto.

14. Mostre, de duas maneiras, que a função $\exp(z^2)$ é inteira.

Qual é sua derivada?

Resp. $2z \exp(z^2)$.

15. Simplifique $\Re[\exp(1/z)]$. Por que esta deve ser uma função harmônica de x e y em todo domínio que não contenha a origem?
 16. Sendo $u + iv$ uma função analítica de z num domínio D , mostre que as funções U e V , onde

$$U(x,y) = \exp[u(x,y)] \cos[v(x,y)],$$

$$V(x,y) = \exp[u(x,y)] \sin[v(x,y)],$$

devem ser harmônicas em D e que, de fato, elas são funções harmônicas conjugadas.

23. As Funções Trigonométricas. Das fórmulas

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y,$$

segue-se que, para todo número real y ,

$$(1) \quad \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y, \quad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y.$$

É natural, portanto, definir as funções co-seno e seno de uma variável complexa z como sendo

$$(2) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ambas as funções $\sin z$ e $\cos z$ são inteiras, pois, de acordo com as fórmulas (2), elas são combinações lineares (Exercício 16, Sec. 20) das funções inteiras $\exp(iz)$ e $\exp(-iz)$.

Conhecendo as derivadas das funções exponenciais nas fórmulas (2), obtemos as seguintes fórmulas de derivação:

$$(3) \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z.$$

As outras quatro funções trigonométricas são definidas em termos das funções seno e co-seno pelas relações usuais

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, & \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z}. \end{aligned}$$

Assim sendo, $\operatorname{tg} z$ e $\sec z$ são analíticas em qualquer domínio onde $\cos z \neq 0$, e $\operatorname{cotg} z$ e $\operatorname{cosec} z$ são analíticas em todo domínio onde $\sin z \neq 0$. Derivando os segundos membros das equações (4), obtemos

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{tg} z &= \sec^2 z, & \frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z &= -\operatorname{cosec}^2 z, \\ \frac{d}{dz} \sec z &= \sec z \operatorname{tg} z, & \frac{d}{dz} \operatorname{cosec} z &= -\operatorname{cosec} z \operatorname{cotg} z. \end{aligned}$$

Da definição de $\cos z$ segue-se que

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Assim, as partes real e imaginária de $\cos z$ são como mostra a seguinte fórmula:

$$(6) \quad \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Da mesma maneira temos

$$(7) \quad \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

É evidente, das fórmulas acima, que

$$(8) \quad \sin(iy) = i \operatorname{sh} y, \quad \cos(iy) = \operatorname{ch} y,$$

e também que $\sin \bar{z}$ e $\cos \bar{z}$ são os conjugados complexos de $\sin z$ e $\cos z$, respectivamente.

Das fórmulas (6) e (7) e da definição de $\operatorname{tg} z$, decorrem imediatamente as seguintes propriedades sobre o caráter periódico das funções:

$$(9) \quad \cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \sin(z + \pi) = \sin z,$$

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z;$$

$$(10) \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

24. Propriedades Adicionais de Funções Trigonométricas. Usando as fórmulas (1) e (2) ou as fórmulas (7) e (6) da secção precedente, o leitor poderá mostrar que

$$(1) \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

$$(2) \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y.$$

É óbvio, destas duas fórmulas, que as funções complexas $\sin z$ e $\cos z$ não são limitadas em valor absoluto, enquanto que, em variáveis reais, os valores absolutos das funções seno e co-seno nunca são maiores do que um.

As identidades trigonométricas esperadas ainda são válidas em variáveis complexas:

$$(3) \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

EMBRAE - FABI - BIBLIOTECA

(4) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$
 (5) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$
 (6) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$

(7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$

(8) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \text{etc.}$

As demonstrações podem ser feitas baseando-se inteiramente nas propriedades da função exponencial. Elas são deixadas como exercícios.

Um valor de z para o qual $f(z) = 0$ se diz *zero* da função f .

Os zeros reais de sen z e cos z são seus únicos zeros. A fim de provar isto para a função seno, seja $\sin z = 0$. Então, de acordo com a fórmula (7), Sec. 23, x e y devem satisfazer às equações simultâneas

$$\sin x \operatorname{ch} y = 0, \quad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Como x e y são reais, $\operatorname{ch} y \geq 1$, nunca se anulando, e $\sin x = 0$ somente para $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ Mas para esses valores de x $\cos x$ não se anula. Portanto $\operatorname{sh} y = 0$, isto é, $y = 0$. Logo

(9) $\sin z = 0$ implica $z = 0$ ou $z = \pm n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$).

Esta afirmação também se aplica a $\operatorname{tg} z$. De um modo análogo obtemos o seguinte:

(10) $\cos z = 0$ implica $z = \pm \frac{(2n-1)\pi}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Em vista da afirmação (10), os pontos singulares de $\operatorname{tg} z$ são os pontos $z = \pm (2n-1)\pi/2$; a função tangente é analítica nos outros pontos.

EXERCÍCIOS

1. Estabeleça as fórmulas de derivação (5), Sec. 23.
2. Deduza as fórmulas (7) e (8), Sec. 23.
3. Deduza a fórmula (1) acima e mostre, então, que

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y.$$

4. Deduza a fórmula (2) e mostre, então, que

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} y.$$

5. Mostre que $|\sin z| \geq |\sin x|$ e $|\cos z| \geq |\cos x|$.

6. Estabeleça as identidades (3) e (4) desta seção.

7. Prove que

$$(a) 1 + \operatorname{tg}^2 z = \operatorname{sec}^2 z; \quad (b) 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z.$$

8. Estabeleça as identidades

$$(a) 2 \sin(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1; \\ (b) 2 \cos(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2) = \sin 2z_1 - \sin 2z_2.$$

9. Mostre que $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ para todo z , e que $\sin(i\bar{z}) \neq \overline{\sin(iz)}$ a menos que $z = \pm n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$

10. Prove a afirmação (10) desta seção.

11. Com o auxílio das identidades no exercício 8, mostre que

$$(a) \text{ se } \cos z_1 = \cos z_2, \text{ então } z_2 = z_1 \pm 2n\pi;$$

$$(b) \text{ se } \sin z_1 = \sin z_2, \text{ então } z_2 = z_1 \pm 2n\pi \text{ ou } z_2 = -z_1 \pm (2n+1)\pi, \text{ onde } n = 0, 1, 2, \dots$$

12. Ache todas as raízes da equação $\cos z = 2$.

$$\text{Resp. } z = \pm 2n\pi + i \operatorname{ch}^{-1} 2 = \pm 2n\pi \pm i \log(2 + \sqrt{3}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

13. Ache todas as raízes da equação $\sin z = \operatorname{ch} 4$.

$$\text{Resp. } z = (\pm 2n + \frac{1}{2})\pi \pm 4i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

14. Mostre, de duas maneiras, que cada uma das seguintes funções é harmônica em todos os pontos:

$$(a) \sin x \operatorname{sh} y; \quad (b) \cos 2x \operatorname{sh} 2y.$$

15. Sendo w uma função analítica de z em algum domínio, explique por que $\sin w$ e $\cos w$ são funções analíticas de z nesse domínio com derivadas $\cos w \frac{dw}{dz}$ e $-\sin w \frac{dw}{dz}$, respectivamente.

16. Mostre que cada uma das funções

$$(a) \sin \bar{z} \text{ e } (b) \cos \bar{z} \text{ não é analítica em nenhum ponto.}$$

25. Funções Hiperbólicas. As funções seno e cosseno hiperbólicos de uma variável complexa são definidas como de variável real, isto é,

$$(1) \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

A função tangente hiperbólica de z é definida pela equação

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

e, então, $\operatorname{cotgh} z$, $\operatorname{sech} z$ e $\operatorname{cosech} z$ são definidas como sendo as inversas multiplicativas (não funções inversas) de $\operatorname{tgh} z$, $\operatorname{ch} z$ e $\operatorname{sh} z$, respectivamente.

Como $\exp z$ e $\exp(-z)$ são inteiros, segue-se, das definições (1), que $\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch} z$ são funções inteiros. A função $\operatorname{tgh} z$ é analítica em todo domínio que não contenha zeros de $\operatorname{ch} z$.

O cálculo e a álgebra das funções hiperbólicas são deduzidos facilmente das definições acima. As fórmulas são as mesmas estabelecidas para as funções correspondentes de variável real:

$$(2) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z,$$

$$(3) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{tgh} z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cotgh} z = -\operatorname{cosech}^2 z,$$

$$(4) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \operatorname{tgh} z,$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cosech} z = -\operatorname{cosech} z \operatorname{cotgh} z.$$

Algumas das identidades mais usadas são:

- (5) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$
- (6) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2;$
- (7) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;$
- (8) $\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z;$
- (9) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$

As relações entre as funções hiperbólicas e as trigonométricas circulares também decorrem das definições dessas funções em termos das funções exponenciais:

- (10) $\operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z,$
- (11) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z.$

As partes real e imaginária das duas primeiras funções hiperbólicas são como mostram as seguintes fórmulas:

- (12) $\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y,$
- (13) $\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y.$

O leitor poderá mostrar, de várias maneiras, que

- (14) $|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y,$
- (15) $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y.$

As funções $\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch} z$ são periódicas com período $2\pi i$; seu quociente $\operatorname{tgh} z$ também é periódico com período πi . Os zeros de $\operatorname{sh} z$ são os números $\pm n\pi i$, e os de $\operatorname{ch} z$ são $\pm(n + \frac{1}{2})\pi i$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$. O último conjunto de números, $z = \pm(n + \frac{1}{2})\pi i$, é, por conseguinte, o conjunto dos pontos singulares da função $\operatorname{tgh} z$.

EXERCÍCIOS

1. Deduza as fórmulas de derivação (2) e (4).
2. Prove as identidades (5) e (7).
3. Mostre como as fórmulas (12) e (13) decorrem das identidades (6), (7) e (10).
4. Deduza a fórmula (15) e mostre, então, que $\operatorname{sh}|x| \leq |\operatorname{ch} z| \leq \operatorname{ch} x$.
5. Mostre que $\operatorname{sh}(z + \pi i) = -\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z$, e, portanto, que $\operatorname{tgh}(z + \pi i) = \operatorname{tgh} z$.
6. Determine todos os zeros de (a) $\operatorname{sh} z$; (b) $\operatorname{ch} z$.
7. Determine todas as raízes das equações
 - (a) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2};$ (b) $\operatorname{sh} z = i;$ (c) $\operatorname{ch} z = -2.$

Resp. (a) $(\pm \frac{1}{3} \pm 2n)\pi i;$ (b) $(\frac{1}{2} \pm 2n)\pi i$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).
8. Por que a função $\operatorname{sh}(e^z)$ é inteira? Escreva sua parte real como função de x e y e diga por que esta parte deve ser harmônica em todos os pontos.

26. A Função Logarítmica. Ramos. Doravante vamos escrever $\operatorname{Log} z$ ou $\ln z$, ao invés de $\log z$, para indicar o logaritmo natural real de um número positivo r . Definimos a função log de uma variável complexa z , onde $z = r \exp(i\theta)$ e o argumento θ é medido em radianos, pela equação

$$(1) \quad \log z = \log(r \exp(i\theta)) = \operatorname{Log} r + i\theta \quad \text{se} \quad r > 0.$$

A definição é natural no sentido de que a mesma é escrita usando formalmente propriedades de logaritmos reais.

Em correspondência ao argumento particular Θ de z tal que

$$-\pi < \Theta \leq \pi,$$

podemos escrever $z = r \exp[i(\Theta \pm 2n\pi)]$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Assim, a fórmula (1) pode ser escrita

$$(2) \quad \log z = \operatorname{Log} r + i(\Theta \pm 2n\pi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

isto é, a função $\log z$ é multivalente com infinitos valores. Chamaremos de *valor principal* de $\log z$ o número definido pela fórmula (2) quando $n = 0$, e o indicaremos por $\operatorname{Log} z$;

$$(3) \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leq \pi).$$

Observe que se z é real e positivo, então $z = r$, de modo que o símbolo $\operatorname{Log} r$ representa o valor principal de $\log z$.

Consideremos o comportamento da função univalente $\operatorname{Log} z$, definida pela fórmula (3), em cada ponto $z^* = x_0$ ($x_0 < 0$) do eixo real negativo. Num tal ponto $r = -x_0$ e $\Theta = \pi$. A parte imaginária Θ de $\operatorname{Log} z$ não é função contínua de z em x_0 , pois seu valor em x_0 é π ao passo que seu valor na parte inferior de cada vizinhança arbitrariamente pequena de x_0 é próximo de $-\pi$. Conseqüentemente, $\operatorname{Log} z$ não é contínua no ponto $z = x_0$ e, portanto, sua derivada não pode existir aí.

A função univalente

$$(4) \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi),$$

definida em todos os pontos $z = r \exp(i\Theta)$, exceto na origem e nos pontos do eixo real negativo, possui as partes contínuas

$$u = \operatorname{Log} r, \quad v = \Theta$$

no seu domínio de definição. Além disso, as derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \Theta} = 1$$

são todas funções contínuas do ponto z nesse domínio e satisfazem às condições de

Cauchy-Riemann em coordenadas polares. Segue-se, então, do Teorema 2, Sec. 18, que a função $\text{Log } z$ definida pela equação (4) é analítica no seu domínio de definição $r > 0, -\pi < \theta < \pi$. Além disso,

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \exp(-i\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r \exp(i\theta)},$$

isto é, a fórmula para a derivada desta função é

$$(5) \quad \frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi).$$

Podemos tornar a função $\log z$, definida pela equação (1), univalente e contínua restringindo r e θ de modo que $r > 0$ e $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, onde θ_0 é qualquer ângulo fixado em radianos. Assim, podemos escrever

$$(6) \quad \log z = \text{Log } r + i\theta \quad (r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi).$$

No domínio de definição desta função, $\text{Log } r$ e θ e suas derivadas parciais em relação a r e θ são funções contínuas de z , e as derivadas parciais satisfazem às condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares. Logo $\log z$ é analítica no domínio $r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, e

$$(7) \quad \frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \quad (r > 0, \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi).$$

Um ramo F de uma função multivalente f é qualquer função univalente que é analítica em algum domínio, tal que em cada ponto z desse domínio o valor $F(z)$ coincida com um dos valores $f(z)$. A exigência de analiticidade não permite uma seleção arbitrária dos valores de f para F .

Em vista desta definição, os valores principais do logaritmo, descritos pela equação (4), representam um ramo $\text{Log } z$, *ramo principal*, da função multivalente $\log z$. Mas, para cada θ_0 fixado a função definida pela equação (6) também é um ramo da mesma função multivalente.

Cada ponto do eixo real negativo $\theta = \pi$, assim como a origem, é um ponto singular do ramo principal $\text{Log } z$, de acordo com a nossa definição (Sec. 19) de ponto singular. O raio $\theta = \pi$ é o *corte de ramo*, para o ramo principal, reta ou curva de pontos singulares introduzida ao definir um ramo de uma função multivalente. O raio $\theta = \theta_0$ é o corte de ramo para o ramo (6) da função logarítmica. O ponto singular $z = 0$, comum para todos os cortes de ramo para a função multivalente $\log z$, é chamado *nó de ramos* (também: *ponto de ramificação*).

27. Propriedades de Logaritmos. Se $w = \log z$, então, independentemente do valor usado para $\log z$, podemos escrever a relação inversa

$$e^w = \exp(\text{Log } r + i\theta) = \exp(\text{Log } r) \exp(i\theta) = r e^{i\theta} = z$$

isto é, para cada um dos valores $\log z$,

$$(1) \quad \exp(\log z) = z \quad (z \neq 0).$$

Conseqüentemente, se $e^z = w$ e $z = x + iy$, então

$$\log w = \log(e^x e^{iy}) = \text{Log } e^x + i(y \pm 2p\pi) = x + iy \pm 2p\pi i$$

onde $p = 0, 1, 2, \dots$. Para o valor de $\log w$ que corresponde ao valor $p = 0$, tem-se

$$(2) \quad \log w = z \quad \text{quando} \quad e^z = w,$$

isto é, para a escolha apropriada do logaritmo,

$$(3) \quad \log(\exp z) = z.$$

As funções \exp e \log são portanto inversas uma da outra.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, onde

$$z_1 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z_2 = r_2 \exp(i\theta_2) \quad (r_1 > 0, r_2 > 0).$$

Como $\text{Log } r_1 + \text{Log } r_2 = \text{Log}(r_1 r_2)$, podemos escrever

$$\log z_1 + \log z_2 = \text{Log}(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2),$$

onde os valores escolhidos para θ_1 e θ_2 dependem dos valores selecionados para $\log z_1$ e $\log z_2$. Mas o número no segundo membro é um logaritmo particular de $r_1 r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)]$; logo

$$(4) \quad \log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2),$$

desde que escolhemos o valor apropriado do logaritmo no segundo membro.

Analogamente, para cada escolha de $\log z_1$ e $\log z_2$ existe um valor de $\log(z_1/z_2)$ tal que

$$(5) \quad \log z_1 - \log z_2 = \log \frac{z_1}{z_2}.$$

Como ilustração da fórmula (4), sejam

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1 \quad \text{e} \quad \log z_1 = \log z_2 = \pi i.$$

Então, $\log z_1 + \log z_2 = 2\pi i$ e $z_1 z_2 = 1$. A fórmula (4) é satisfeita quando escolhemos $\log 1 = 2\pi i$; a mesma não é satisfeita quando escolhemos qualquer outro valor de $\log 1$, o valor principal $\text{Log } 1 = 0$ por exemplo.

Sejam, agora, m e n dois inteiros positivos fixos e

$$z = r \exp(i\theta) \quad (r > 0, -\pi < \theta \leq \pi).$$

Quando p e p' tomam sucessivamente os valores $0, 1, 2, \dots$, todos os números dos dois conjuntos $m \log z$ e $\log z^m$ são dados pelas equações

$$(6) \quad m \log z = m [\text{Log } r + i(\theta \pm 2\pi p)] \\ = \text{Log } r^m + i(m\theta \pm 2\pi mp),$$

$$(7) \quad \log z^m = \text{Log } r^m + i(m\theta \pm 2\pi p').$$

O segundo conjunto de números contém o primeiro; de fato

$$(8) \quad \log z^m = m \log z \quad \text{quando } p' = mp.$$

Por outro lado, o conjunto $(1/n) \log z$ e o conjunto $\log(z^{1/n})$, onde $z^{1/n}$ por si já é um conjunto de n números, são os mesmos. Com efeito, quando $q = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$$n \log(z^{1/n}) = n \log \left[r^{1/n} \exp \left(i \frac{\theta + 2\pi q}{n} \right) \right] \\ = \text{Log } r + i[\theta + 2\pi(q \pm pn)]$$

e $\pm pn + q$ representa o mesmo conjunto de inteiros que o conjunto $\pm p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). Logo $n \log(z^{1/n}) = \log z$, ou

$$(9) \quad \log(z^{1/n}) = \frac{1}{n} \log z.$$

Como a função exponencial é periódica com período $2\pi i$, vemos, das equações (6) e (7), que

$$\exp(m \log z) = \exp(\log z^m),$$

onde a escolha de valores dos logaritmos é arbitrária. Quando $\log z$ toma seus valores sucessivos, então, de acordo com a fórmula (9),

$$\exp\left(\frac{m}{n} \log z\right) = \exp[m \log(z^{1/n})] = \exp[\log(z^{m/n})].$$

Mas, em vista da fórmula (1), cada um dos n números $z^{m/n}$ pode ser escrito $\exp[\log(z^{m/n})]$, e portanto

$$(10) \quad z^{m/n} = \exp\left(\frac{m}{n} \log z\right).$$

Assim, para os vários valores de $\log z$ o segundo membro toma exatamente n valores distintos, os números $z^{m/n}$.

EXERCÍCIOS

1. Quando $n = 0, 1, 2, \dots$, mostre que

(a) $\log 1 = \pm 2\pi i$; (b) $\log(-1) = \pm(2n+1)\pi i$;
(c) $\log i = \frac{1}{2}\pi i \pm 2\pi n i$; (d) $\log(i^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}\pi i \pm n\pi i$.

2. Mostre que

$$(a) \text{Log}(-ei) = 1 - \frac{1}{2}\pi i; \quad (b) \text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\text{Log}2 - \frac{1}{4}\pi i.$$

$$(3) \quad \text{Ache todas as raízes da equação } \log z = \frac{1}{2}\pi i.$$

Resp. $z = i$.

$$(4) \quad \text{Ache todas as raízes da equação } e^z = -3.$$

Resp. $z = \text{Log } 3 \pm (2n+1)\pi i$.

$$5. \quad \text{Estabeleça a fórmula (5) desta secção.}$$

$$6. \quad \text{Para todos os pontos } z \text{ do semiplano } x > 0 \text{ mostre que } z = \text{Log } z \pm \left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi i\right) \text{ e } z = \text{Log } z \pm \left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi i\right) \text{ e } \text{Log } z = \frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x},$$

onde $\arctan t$ indica o valor principal usado no cálculo, isto é, $-\pi/2 < \arctan t < \pi/2$. Use esta representação juntamente com o Teorema 1, Sec. 18, para dar uma outra demonstração de que o ramo principal $\text{Log } z$ é analítico no domínio $x > 0$ e a fórmula (5), Sec. 26, é válida aí. Note, entretanto, o aparecimento de algumas complicações com a inversa da tangente e sua derivação na parte restante do domínio de analiticidade, $r > 0, -\pi < \arg z < \pi$, de $\text{Log } z$, especialmente na reta $x = 0$.

7. Mostre, de duas maneiras, que a função $\text{Log}(x^2 + y^2)$ é harmônica em todo domínio que não contenha a origem.

8. Escreva $z = r \exp(i\theta)$ e $z - 1 = \rho \exp(i\phi)$ e mostre que

$$\Re[\log(z-1)] = \frac{1}{2} \text{Log}(1 + r^2 - 2r \cos \theta) \quad (z \neq 1).$$

Por que esta função deve satisfazer à equação de Laplace quando $z \neq 1$?

28. Exponentes Complexos. Quando o expoente k é um número racional real, $k = m/n$, a fórmula (10) da secção precedente apresenta os n números z^k na forma

$$(1) \quad z^k = \exp(k \log z) \quad \left(k = \frac{m}{n}, z \neq 0\right).$$

Antes definimos z^{-k} como sendo $1/z^k$.

Vamos, agora, definir z^c , onde o expoente c é qualquer número complexo, substituindo k por c na fórmula (1), isto é,

$$(2) \quad z^c = \exp(c \log z) \quad (z, c \text{ complexos, } z \neq 0).$$

A definição identifica os dois conjuntos de números z^{-c} e $1/z^c$:

$$z^{-c} = \frac{1}{z^c}.$$

Esta inclui a fórmula (1) como caso particular, mas a mesma também define a função multivalente z^c quando c é real e irracional e quando c é não-real. Por exemplo,

$$\begin{aligned} i^{-2} &= \exp(-2i \log i) = \exp\left[-2i\left(\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi\right)i\right] \\ &= \exp(\pi \pm 4n\pi) \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Se $z = r \exp(i\theta)$ e θ_0 é uma constante real, a função

$$(3) \quad \log z = \operatorname{Log} r + i\theta \quad (r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi)$$

é uni-valente e analítica no domínio indicado, como também o é a função composta $\exp(c \log z)$. Assim, a função z^c definida pela equação (2), em que $\log z$ é definida pela equação (3), é uni-valente e analítica no domínio $r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$. A derivada deste ramo da função multivalente, (2) pode ser escrita, em termos do logaritmo definido pela fórmula (3),

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{d}{dz} z^c &= \exp(c \log z) \frac{c}{z} = c \frac{\exp(c \log z)}{\exp(\log z)} \\ &= c \exp[(c-1) \log z]. \end{aligned}$$

O último membro é a função univalente cz^{c-1} ; assim,

$$(5) \quad \frac{d}{dz} z^c = c \frac{z^c}{z} = cz^{c-1} \quad (r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi).$$

Em particular, quando $\theta_0 = -\pi$, de modo que $-\pi < \theta < \pi$, a função

$$(6) \quad z^c = \exp(c \operatorname{Log} z) \quad (z \neq 0)$$

e o *ramo principal* da função, multi-valente, potência (2). Este ramo é univalente e analítico no domínio $r > 0, -\pi < \theta < \pi$. O *valor principal* de e^z , como potência de e , é portanto $\exp(z \operatorname{Log} e) = \exp z$.

Como exemplo, escrevemos o valor principal de $(-i)^i$:

$$\exp[i \operatorname{Log}(-i)] = \exp\left[i\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right] = \exp\frac{\pi}{2}.$$

Como outro exemplo, o ramo principal de $z^{\frac{1}{3}}$,

$$z^{\frac{2}{3}} = \exp\left(\frac{2}{3} \operatorname{Log} z\right) = \exp\left(\frac{2}{3} \operatorname{Log} r + \frac{2}{3}i\theta\right) = \sqrt[3]{r^2} \exp\left(\frac{2}{3}i\theta\right),$$

é analítica no domínio $r > 0, -\pi < \theta < \pi$, como podemos ver a partir do Teorema 2, Sec. 18.

De acordo com a definição (2), a *função exponencial com base c*, onde c é qualquer constante complexa distinta de zero, pode ser escrita

$$(7) \quad c^z = \exp(z \log c) \quad (c \neq 0).$$

Quando o número $\log c$ é especificado, c^z é uma função inteira de z e a fórmula de derivação para esta função é facilmente deduzida:

$$(8) \quad \frac{d}{dz} c^z = c^z \log c \quad (c \neq 0).$$

29. Funções Trigonométricas Inversas. As inversas das funções trigonométricas e hiperbólicas podem ser descritas em termos de logaritmos.

Definimos a função $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ como sendo a inversa da função seno; assim,

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Podemos obter e^{iw} , então, resolvendo a equação

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

que é quadrática em e^{iw} . É fácil ver que

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ é, como sabemos, uma função bivalente de z . Finalmente podemos escrever

$$(1) \quad w = \operatorname{sen}^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}],$$

que é uma função multi-valente com infinitos valores. Quando usamos ramos particulares da raiz quadrada e do logaritmo, a função (1) se torna univalente e analítica por ser uma composição de funções analíticas.

De modo análogo, podemos ver que as inversas das funções $\cos w$ e $\operatorname{tg} w$ são descritas pelas seguintes fórmulas:

$$(2) \quad \cos^{-1} z = -i \log [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}],$$

$$(3) \quad \operatorname{tg}^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$

As derivadas destas três funções podem ser escritas a partir das fórmulas acima. A derivada da última,

$$(4) \quad \frac{d}{dz} (\operatorname{tg}^{-1} z) = \frac{1}{1 + z^2},$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tg}^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}.$$

não depende da maneira pela qual a função é tornada univale. As derivadas das duas primeiras dependem dos valores escolhidos para raízes quadradas; por exemplo,

$$(5) \quad \frac{d}{dz} (\operatorname{sen}^{-1} z) = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

As inversas das funções hiperbólicas podem ser escritas, em termos de logaritmos, assim:

$$(6) \quad \operatorname{sh}^{-1} z = \log [z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}],$$

$$(7) \quad \operatorname{ch}^{-1} z = \log [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}],$$

$$(8) \quad \operatorname{tgh}^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

EXERCÍCIOS

1. Quando $n = 0, 1, 2, \dots$, mostre que

$$(a) (1+i)^i = \exp\left(-\frac{1}{4}\pi \pm 2n\pi\right) \exp\left(\frac{1}{2}i \operatorname{Log} 2\right);$$

$$(b) (-1)^{1/\pi} = \exp[\pm(2n+1)i].$$

2. Ache o valor principal de

$$(a) i^i; \quad (b) \left[\frac{1}{2}e(-1-i\sqrt{3})\right]^{3\pi i}; \quad (c) (1-i)^{4i}.$$

$$\text{Resp. (a) } \exp(-\frac{1}{2}\pi); \quad (b) -\exp(2\pi^2).$$

3. Mostre que, se $z \neq 0$,

$$(a) z^0 = 1;$$

$$(b) |z^k| = \exp(k \operatorname{Log}|z|) = |z|^k \text{ quando } k \text{ é real.}$$

4. Sejam b, c e z números complexos com $z \neq 0$. Sendo que todas as potências aqui são valores principais, mostre que

$$(a) z^{-c} = \frac{1}{z^c};$$

$$(b) (z^b)^n = z^{bn} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(c) z^b z^c = z^{b+c}; \quad (d) \frac{z^b}{z^c} = z^{b-c}.$$

5. Usando os valores principais de z^i , escreva as funções harmônicas conjugadas $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$, onde $z^i = u + iv$.

6. Deduza a fórmula (8), Sec. 28; também, a fórmula para a derivada de e^{wz} em relação a z , onde $w'(z)$ existe.

7. Ache os valores de

$$(a) \operatorname{tg}^{-1}(2i); \quad (b) \operatorname{tg}^{-1}(1+i); \quad (c) \operatorname{ch}^{-1}(-1); \quad (d) \operatorname{tgh}^{-1} 0.$$

$$\text{Resp. (a) } \pm(n + \frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}i \operatorname{Log} 3; \quad (d) \pm n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

8. Resolva a equação $\operatorname{sen} z = 2$ em relação a z (a) identificando as partes real e imaginária nos dois membros; (b) usando a fórmula (1).

$$\text{Resp. } z = \frac{1}{2}\pi(1 \pm 4n) \pm i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

9. Resolva a equação $\operatorname{cos} z = \sqrt{2}$ em relação a z .
10. Deduza as fórmulas (2) e (5) desta secção.
11. Deduza as fórmulas (3) e (4) desta secção.
12. Deduza as fórmulas (6) e (8) desta secção.

$$\frac{z^i - \bar{z}^i}{2i} = 2 \Rightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 4i \Rightarrow \frac{e^{iz} - 1}{e^{iz}} = \frac{4i}{e^{iz}} \Rightarrow e^{iz} - 1 = 4i e^{-iz}$$

$$e^{iz} - 1 = 4i e^{-iz} \Rightarrow z^2 - 4iz - 1 = 0$$

$$z = 2i \pm 2i\sqrt{3} = 2i \pm \sqrt{3}$$

$$\operatorname{Log} e^{iz} = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) = \pm(\operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}))$$

$$iz + 2n\pi i = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3})$$

$$iz + 2n\pi i = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2}(-i)$$

$$z = \frac{1}{2}\pi(1 \pm 4n) + i\operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3})$$

CAPÍTULO 4

Transformações
por Funções Elementares

O conceito de aplicação, ou transformação de pontos, por uma função f de uma variável complexa z foi introduzido em Sec. 11. Na realidade, definimos funções como transformações de pontos. Salientamos, na ocasião, que a natureza da função pode ser exibida graficamente, até certo ponto, pela maneira segundo a qual a função leva regiões e curvas de um plano complexo no outro. Mostraremos que o problema de encontrar uma função de x e y que seja harmônica numa região e satisfaça a certas condições prescritas sobre a fronteira da região, pode ser resolvido por meio de transformações por funções *analíticas*. Tais problemas, problemas de contorno, na equação de Laplace são proeminentes na Física e Engenharia (Caps. 9, 10). Como preparativo para a resolução desses problemas, devemos ver como várias regiões são transformadas por funções analíticas elementares.

30. Funções Lineares. A transformação por meio da função

$$(1) \quad w = z + C,$$

onde C é uma constante complexa, é a translação de cada ponto z através do vetor que representa C . Isto é, se

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad C = C_1 + iC_2,$$

então a imagem de cada ponto (x, y) no plano- z é o ponto

$$(x + C_1, y + C_2)$$

no plano- w . Visto que todo ponto numa região do plano- z é levado no plano- w nesta mesma maneira, a imagem da região é simplesmente a translação da região. As duas regiões têm a mesma forma, o mesmo tamanho e a mesma orientação.

Seja B uma constante complexa cuja forma polar é $B = b \exp(i\beta)$. Então, se $z = r \exp(i\theta)$, a função

$$(2) \quad w = Bz = bre^{i(\theta+\beta)}$$

transforma o ponto (r, θ) , do plano- z , no ponto do plano- w , cujas coordenadas polares são br e $\theta + \beta$. Isto é, a transformação consiste em girar o raio vetor do ponto z em torno da origem, de um ângulo $\beta = \arg B$ e em expandir ou contrair o raio vetor pelo fator $b = |B|$. Toda região no plano- z é transformada por esta rotação e expansão numa região geometricamente semelhante no plano- w .

Aplicando a transformação (1) à variável w na equação (2), vemos que a transformação pela função linear geral

$$(3) \quad w = Bz + C$$

consiste na rotação pelo ângulo $\arg B$ e expansão pelo fator $|B|$, seguidas pela translação pelo vetor C .
Como ilustração, a função

$$w = (1 + i)z + 2 - i$$

transforma a região retangular no plano- z (Fig. 15) na região retangular no plano- w .

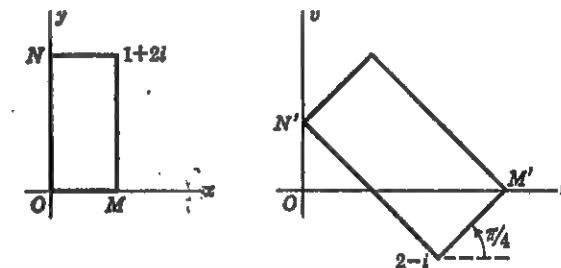


Fig. 15

Isto é evidente geometricamente, visto que $\arg(1 + i) = \pi/4$ e $|1 + i| = \sqrt{2}$.

Como outro exemplo, consideremos a imagem da região $0 < x < 1$, faixa infinita entre as retas $x = 0$ e $x = 1$, pela transformação

$$w = iz.$$

Como $i = \exp(i\pi/2)$, a transformação é a rotação pelo ângulo $\pi/2$. Portanto a imagem da faixa dada é a faixa $0 < v < 1$. Isto se vê também notando-se que $u = -y$ e $v = x$, pois $w = iz$. Quando $0 < x < 1$ e y é livre, segue-se que $0 < v < 1$ e u é livre.

31. As Funções z^n . Consideremos primeiro a função

$$w = z^2.$$

Esta transformação pode ser descrita facilmente em termos de coordenadas polares.

Se $z = r \exp(i\theta)$ e $w = \rho \exp(i\phi)$, então

$$\rho e^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta}.$$

Logo a imagem do ponto (r, θ) é o ponto no plano-w cujas coordenadas polares são transformadas nos círculos

Em particular, a função z^2 transforma o primeiro quadrante do plano-z, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r \geq 0$, no semiplano superior do plano-w (Fig. 16).

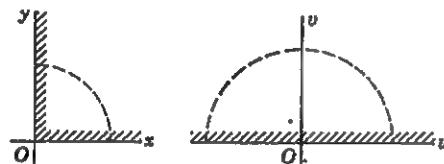


FIG. 16. $w = z^2$.

Os círculos em torno da origem, $r = r_0$, são transformados nos círculos $\rho = r_0^2$ do plano-w. A região semicircular $r \leq r_0$, $0 \leq \theta < \pi$ é levada na região circular $\rho \leq r_0^2$, e a parte dessa região semicircular no primeiro quadrante é transformada na parte superior da região circular, como indicam as linhas tracejadas na figura 16.

Na transformação das regiões acima consideradas, existe um único ponto na região transformada correspondendo a um ponto dado na região original, e reciprocamente. Esta correspondência biunívoca, porém, não subsiste para a região circular

$$r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

e sua imagem $\rho \leq r_0^2$, uma vez que cada ponto da última região é a imagem de dois pontos z e $-z$ da primeira.

Em coordenadas retangulares a transformação $w = z^2$ fica

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Se $2xy = c_2$, então $v = c_2$, e reciprocamente, onde c_2 é uma constante real. Isto é, todo ponto da hipérbole $2xy = c_2$ tem seu ponto-imagem sobre a reta horizontal $v = c_2$, e todo ponto da reta é a imagem de algum ponto da hipérbole. Assim, a imagem da hipérbole é a reta inteira; mas a cada ponto w da reta correspondem dois pontos, z e $-z$, da hipérbole. Os pontos do ramo superior ($y > 0$) da hipérbole estão em correspondência biunívoca com os pontos da reta, pois, como já observamos acima, existe tal correspondência entre os pontos do semiplano superior do plano-z e os pontos do plano-w. O ramo inferior da hipérbole também é transformado na reta em correspondência biunívoca.

Da mesma maneira, a imagem da hipérbole $x^2 - y^2 = c_1$ é a reta $u = c_1$; a correspondência entre pontos é biunívoca para cada um dos dois ramos da

hipérbole. As hipérboles, como pré-imagens das retas $u = c_1$ e $v = c_2$, foram ilustradas no Cap. 2 (Fig. 14).

O domínio $x > 0$, $y > 0$, $xy < 1$ consiste de todos os pontos do primeiro quadrante que ficam abaixo da hipérbole $xy = 1$, ou de todos os pontos dos ramos superiores de todas as hipérboles da família $xy = c$ ($0 < c < 1$). A imagem deste domínio, portanto, consiste de todos os pontos de todas as retas $v = 2c$, isto é, a imagem do domínio é a faixa horizontal $0 < v < 2$.

Quando n é um inteiro positivo, a transformação

$$w = z^n, \quad \text{ou} \quad \rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta},$$

leva a região angular $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/n$ no semi-plano superior ($\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$) do plano-w (Fig. 17), visto que $\rho = r^n$ e $\phi = n\theta$. A mesma transforma um arco circular

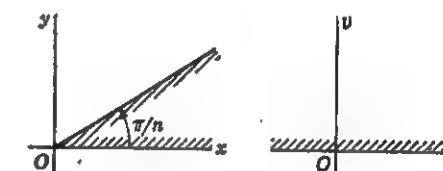


FIG. 17. $w = z^n$.

$$r = r_0 \quad (\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \frac{2\pi}{n})$$

no círculo $\rho = r_0^n$. A correspondência entre pontos nos dois casos acima é biunívoca.

32. A Função $1/z$. A transformação

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{w}$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano-z e os do plano-w, exceto para os pontos $z = 0$ e $w = 0$; o primeiro não tem imagem e o último não é imagem de nenhum ponto.

Em coordenadas polares a transformação fica

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

Esta transformação pode ser descrita por meio das transformações consecutivas

$$z' = \frac{1}{r} e^{i\theta}, \quad w = \bar{z}'.$$

A primeira é uma *inversão* em relação ao círculo unitário $r = 1$, isto é, o ponto z' se situa sobre o raio traçado pelo ponto z , e sua distância da origem é tal que $|z'| = |z| = 1$. A inversão é seguida pela reflexão $w = \bar{z}'$ no eixo real (Fig. 18). Assim, os pontos que ficam fora do círculo unitário são levados ao interior do círculo, e reciprocamente. Os pontos sobre o círculo são simplesmente refletidos no eixo real.

Em coordenadas cartesianas, a equação

$$w = u + iv = \frac{1}{x + iy}.$$

nos fornece as relações

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$e \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

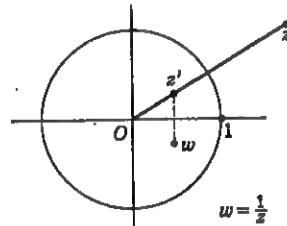


FIG. 18

Se a, b, c e d são números reais, a equação

$$(1) \quad a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

representa um círculo ou uma reta, conforme $a \neq 0$ ou $a = 0$. Sob a transformação $w = 1/z$, a equação (1) se torna

$$(2) \quad d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0.$$

Reciprocamente, se u e v satisfazem à equação (2), então x e y são soluções da equação (1). Portanto, se a e d são distintos de zero, a curva e sua imagem são ambas círculos, isto é, círculos que não passam pela origem $z = 0$ são transformados em círculos que não passam pela origem $w = 0$.

De modo análogo, as equações (1) e (2) mostram que todo círculo passando pela origem $z = 0$ é transformado numa linha reta no plano w . Retas no plano z , por sua vez, se transformam em círculos passando pela origem $w = 0$, a menos que a reta passe pela origem $z = 0$, quando, então, a imagem é uma reta passando pela origem $w = 0$.

Se considerarmos retas como “limites” de círculos, podemos dizer que a transformação sempre leva círculos em círculos. Em particular, as retas $x = c_1$ são transformadas nos círculos.

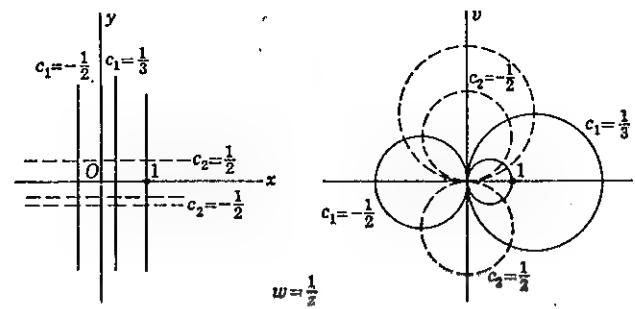


FIG. 19

$$(3) \quad u^2 + v^2 - \frac{u}{c_1} = 0,$$

tangentes ao eixo- v na origem, e as retas $y = c_2$ nos círculos

$$(4) \quad u^2 + v^2 + \frac{v}{c_2^2} = 0$$

se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, como mostra a figura 19.

O semiplano $x > c_1$ tem como imagem a região

$$(5) \quad \frac{u}{u^2 + v^2} > c_1.$$

Quando $c_1 > 0$, segue-se que

$$(6) \quad \left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2,$$

isto é, o ponto w está no interior de um círculo tangente ao eixo- v na origem. Reciprocamente, se u e v satisfazem à desigualdade (6) e $c_1 > 0$, então segue a desigualdade (5) e, portanto, $x > c_1$. Consequentemente, todo ponto no interior do círculo é a imagem de algum ponto no semiplano; assim, a imagem do semiplano é a região circular (6).

33. O Ponto no Infinito. Pela transformação $w = 1/z$, ou

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{r} e^{-i\theta},$$

os pontos z exteriores ao círculo $r = R$ são transformados nos pontos w interiores ao círculo $\rho = 1/R$. O ponto $w = 0$ não é a imagem de nenhum ponto no

plano- z finito. Contudo, fazendo o raio R suficientemente grande, é possível fazer com que as imagens dos pontos exteriores ao círculo $r = R$ caiam no interior de uma vizinhança arbitrariamente pequena do ponto $w = 0$.

É conveniente usar, às vezes, o conceito do ponto no infinito, ou ponto infinito, $z = \infty$. Formalmente, este ponto é a pré-imagem do ponto $w = 0$ pela transformação $w = 1/z$, isto é, o ponto $w = 0$ é a imagem deste ponto pela transformação. Desta modo, quando fazemos uma afirmação sobre o comportamento de uma função em $z = \infty$, estamos nos referindo, precisamente, ao comportamento da função em $z' = 0$, onde $z' = 1/z$.

Podemos dizer, por exemplo, que a função

$$w = \frac{4z^2}{(1-z)^2}$$

transforma o ponto $z = \infty$ no ponto $w = 4$. Isto significa que, se escrevemos $z = 1/z'$, de modo que

$$w = \frac{4/z'^2}{(1-1/z')^2} = \frac{4}{(z'-1)^2}$$

então $w = 4$ quando $z' = 0$. Podemos dizer também que $w = \infty$ quando $z = 1$; se escrevemos $w = 1/w'$, então

$$w' = \frac{(1-z)^2}{4z^2}$$

e $w' = 0$ quando $z = 1$.

A noção do ponto infinito é uma abreviação para um processo de limite, e em caso de dúvida devemos lançar mão do uso direto de limites. A menos que se afime o contrário, continuaremos a usar as palavras *ponto* e *número complexo* para significar pontos com coordenadas finitas e os números complexos representados por tais pontos.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que a função $w = iz + i$ transforma o semi-plano $x > 0$ no semi-plano $v > 1$.
2. Ache a região que é a imagem do semi-plano $y > 0$ pela transformação $w = (1+i)z$ (a) usando coordenadas polares, (b) usando coordenadas retangulares. Mostre as regiões graficamente.
3. Ache a imagem da região $y > 1$ sob a transformação $w = (1-i)z$.
4. Ache a imagem da faixa semi-infinita $x > 0$, $0 < y < 2$ pela transformação $w = iz + 1$. Mostre as regiões graficamente.

Resp. $-1 < u < 1$, $v > 0$.

5. Sendo B e C constantes complexas, dê uma descrição geométrica da transformação $w = B(z + C)$.
6. Descreva a região na qual o setor circular $0 < \theta < \pi/4$, $r < 1$ é transformado pela função (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.
7. Qual é a pré-imagem, no plano- z , da região retangular delimitada pelas retas $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ e $v = 2$ sob a transformação $w = z^2$?
8. Mostre que a função $w = z^2$ transforma as retas $y = c$ em parábolas com foco comum no ponto $w = 0$. Qual é a imagem da reta $y = 0$?
9. Ache a imagem da faixa infinita $0 < y < 1/(2c)$ pela transformação $w = 1/z$. Mostre as regiões graficamente.

Resp. $u^2 + (v + c)^2 > c^2$, $v < 0$.

10. Mostre que a imagem do semiplano $y > c$, pela transformação $w = 1/z$, é o interior de um círculo, desde que $c > 0$. Qual é a imagem quando $c = 0$? E quando $c < 0$?
11. Ache a imagem do quadrante $x > 1$, $y > 0$ pela transformação $w = 1/z$.
12. Ache a imagem da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ pela transformação $w = 1/z$.

Resp. $\rho^2 = \cos 2\phi$.

13. Descreva geometricamente a transformação $w = 1/(z - 1)$.
14. Descreva geometricamente a transformação $w = i/z$; mostre também que a transformação leva círculos e retas em círculos e retas.
15. Ache a imagem da faixa semi-infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ pela transformação $w = i/z$. Mostre as regiões graficamente.

Resp. $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $\rho \geq \cos \phi$.

16. Quando um círculo não degenerado é sujeito à ação da transformação $w = 1/z$, prove que seu centro nunca é transformado no centro do círculo-imagem.

34. A Transformação Linear Fracionária. A transformação T :

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

onde a , b , c e d são constantes complexas, é chamada *transformação linear fracionária*. Vamos abreviá-la escrevendo $w = T(z)$. Se $ad - bc = 0$, o segundo membro da equação (1) se torna uma constante ou sem sentido.

A inversa T^{-1} desta transformação,

$$(2) \quad z = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

ou $z = T^{-1}(w)$, é também uma transformação linear fracionária.

A transformação T faz corresponder a cada ponto do plano- z , exceto ao ponto $z = -d/c$ quando $c \neq 0$, um único ponto do plano- w . De acordo com a forma (2) da equação (1), cada ponto do plano- w , exceto o ponto $w = a/c$ quando $c \neq 0$, tem uma única imagem no plano- z . Esses pontos excepcionais para T e T^{-1} são transformados nos pontos $w = \infty$ e $z = \infty$, respectivamente.

O plano complexo *estendido*, ou o *fecho* do plano, consiste de todos os números complexos finitos mais o ponto infinito. Assim, a transformação T estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano- z estendido e os do plano- w estendido.

A composta de duas transformações lineares fracionárias é ainda linear fracionária. Isto é, se z em (1) provém de z' por uma transformação T' :

$$z = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'},$$

podemos achar, por substituição direta, as constantes α , β , γ e δ tais que

$$(3) \quad w = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}.$$

A transformação linear fracionária (3) é denotada por TT' , ou $w = T[T'(z)]$. Se T'' é uma terceira transformação linear fracionária, podemos verificar, pela substituição direta, que as transformações $(TT')T''$ e $T(T'T'')$ são as mesmas, isto é, a composição de transformações lineares fracionárias satisfaz à lei associativa

$$(4) \quad T(T'T'') = (TT')T''.$$

A transformação linear fracionária particular $w = z$ é a transformação identidade $T_0: TT_0 = T$. Acabamos de mostrar que, na linguagem de álgebra, o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias é um *grupo* (Exercícios 16 e 18, Sec. 35).

A transformação linear fracionária sempre transforma círculos e retas em círculos e retas. Mostraremos isto escrevendo T como sucessão de transformações que tem esta propriedade.

Quando $c \neq 0$, a equação (1) pode ser escrita

$$w = \frac{a(z + d/c) + b - ad/c}{c(z + d/c)} = \frac{a}{c} + \frac{b - ad/c}{cz + d}.$$

Escrevemos agora

$$(5) \quad z' = cz + d, \quad z'' = \frac{1}{z};$$

segue-se, então, que

$$(6) \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} z''.$$

As equações (5) e (6) representam três transformações sucessivas que resultam

na transformação $w = T(z)$. A primeira e a terceira são do tipo

$$(7) \quad w = Bz + C$$

discutido na Sec. 30. A segunda é uma transformação do tipo $w = 1/z$ (Sec. 32). Notemos que a transformação linear (7) não altera a forma da curva e que a transformação $w = 1/z$ leva círculos e retas em círculos e retas; assim, T possui esta última propriedade.

Se $c = 0$, a transformação (1) é do tipo (7).

Quando o denominador é eliminado, a equação (1) toma a forma

$$(8) \quad Azw + Bz + Cw + D = 0,$$

equação esta que é linear em z e linear em w , ou *bilinear* em z e w . Por esta razão, a transformação linear fracionária também é chamada *transformação bilinear*.

Existe uma única transformação bilinear que leva três pontos distintos dados z_1 , z_2 e z_3 em três pontos especificados distintos w_1 , w_2 e w_3 , respectivamente. A demonstração é deixada como exercício. Mas podemos verificar que a referida transformação é dada pela equação

$$(9) \quad \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

a qual pode ser escrita na forma bilinear (8) desenvolvendo os produtos na equação

$$(10) \quad (z - z_3)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = \\ = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1).$$

Com efeito, se $z = z_1$, o segundo membro desta última equação se anula, e consequentemente $w = w_1$; analogamente, se $z = z_3$, então $w = w_3$. Se $z = z_2$, dois fatores são comuns a ambos os membros da equação (10), e a equação se reduz a

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1);$$

a solução desta equação linear é obviamente $w = w_2$.

Na equação (9), o ponto infinito pode ser introduzido como um dos pontos prescritos no plano- w ou no plano- z . Por exemplo, sejam $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1$ e $w_1 = i$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$. Pondo $w_3 = 1/w_3$, podemos escrever a transformação na forma

$$\frac{(w - w_1)(w_3 w_2 - 1)}{(w_3 w - 1)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Quando $w_3 = 0$ e os valores das demais constantes são inseridos aqui, a

equação fica

$$\frac{w - i}{1 - i} = \frac{z - 1}{(z + 1)(-1)}, \text{ ou } w = \frac{(-1 + 2i)z + 1}{z + 1}.$$

Usando qualquer uma destas duas formas, o leitor poderá verificar que os três pontos dados são transformados nos pontos especificados e, em particular, que w tende para o infinito quando z se aproxima de -1 .

Um ponto fixo z de uma transformação é aquele cuja imagem w representa o mesmo número, $w = z$. A transformação bilinear tem no máximo dois pontos fixos, representados pelas raízes da equação em z , obtida escrevendo-se $w = z$ na equação (1) ou na equação (8).

35. Transformações Lineares Fracionárias Especiais. Vamos determinar todas as transformações lineares fracionárias que transformam a parte superior do plano- z , $y \geq 0$, no disco unitário $|w| \leq 1$.

A fronteira $y = 0$ do semiplano deve ter a fronteira $|w| = 1$ do disco unitário como sua imagem, pois a transformação

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}$$

leva retas em círculos ou retas. Neste caso, a reta $y = 0$ deve transformar-se num círculo visto que a região no plano- w é de extensão finita. Suponha que esse círculo seja interior ao círculo $|w| = 1$. Como w é uma função contínua de z , pontos imediatamente abaixo do eixo- x são transformados em pontos próximos desse círculo, inteiros ao círculo $|w| = 1$, o que é contrário às condições exigidas.

Se fizermos três pontos distintos da reta $y = 0$ transformarem-se em pontos do círculo $|w| = 1$, então a reta toda será transformada neste círculo, uma vez que os três pontos-imagem determinam o círculo-imagem.*

De acordo com a equação (1), a exigência de que $|w| = 1$ para cada um dos três pontos $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$ nos fornece as equações

$$(2) \quad |b| = |d|,$$

$$(3) \quad |a + b| = |c + d|,$$

$$(4) \quad |a| = |c|.$$

Segue-se da última equação que $a \neq 0$ e $c \neq 0$, pois, se um deles for igual a zero o outro também o será e a transformação (1) levará todo o plano- z num único ponto. Logo, podemos escrever

$$w = \frac{az + b/a}{cz + d/c}$$

* Toda transformação da reta no círculo deve levar esses três pontos prescritos em três pontos do círculo.

ou, como $|a/c| = 1$,

$$(5) \quad w = \exp(i\theta_0) \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

onde θ_0 é uma constante real qualquer. Também, $|b/a| = |d/c|$, em vista das equações (2) e (4); portanto $|z_1| = |z_2|$.

A condição (3) ainda não foi usada. Vamos impor a condição correspondente, de que $|w| = 1$ quando $z = 1$, à equação (5). Então

$$|1 - z_1| = |1 - z_2|,$$

$$\text{ou } (1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_2)(1 - \bar{z}_2).$$

Mas $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2$, pois $|z_1| = |z_2|$, e a relação acima reduz-se a

$$z_1 + \bar{z}_1 = z_2 + \bar{z}_2,$$

ou $\Re(z_1) = \Re(z_2)$. Portanto $z_2 = z_1$ ou $z_2 = \bar{z}_1$. A condição $z_2 = z_1$ nos conduz à transformação $w = \exp(i\theta_0)$ do plano- z num único ponto; logo devemos ter $z_2 = \bar{z}_1$.

A transformação procurada deve ter portanto a forma

$$(6) \quad w = e^{i\theta_0} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}.$$

Observe que o ponto $w = 0$ é a imagem do ponto $z = z_1$, e portanto se o semiplano superior deve ser transformado no interior do círculo $|w| = 1$, o ponto z_1 deve situar-se no semiplano superior, isto é,

$$(7) \quad y_1 = \Re(z_1) > 0.$$

Vamos verificar que a transformação (6) leva efetivamente o semiplano no disco unitário interpretando a equação

$$|w| = \frac{|z - z_1|}{|z - \bar{z}_1|}$$

geometricamente (Fig. 20). Como os pontos z e z_1 estão no semiplano superior, eles ficam do mesmo lado da bissetriz perpendicular ao segmento definido por z_1 e \bar{z}_1 . Logo a distância $|z - z_1|$ não excede a distância $|z - \bar{z}_1|$; isto é, $|w| \leq 1$. A transformação (6) é portanto uma das procuradas.

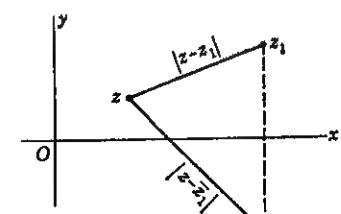


Fig. 20

A transformação identidade $w = z$ não é a única que pode transformar uma região em si mesma. De fato, todas as transformações

$$(8) \quad w = e^{i\theta_1} \frac{z - z_0}{z_0 z - 1},$$

onde θ_1 é real e $|z_0| < 1$, levam o disco unitário $|z| \leq 1$ no disco unitário $|w| \leq 1$. A prova é deixada como exercício.

Duas transformações, cada uma das quais transforma uma região R_1 numa região R_2 , não são necessariamente as mesmas. Este fato é ilustrado pelas transformações (6) com diferentes valores das constantes θ_0 e z_1 .

EXERCÍCIOS

1. Determine a transformação linear fracionária que transforma os pontos $z_1 = 2$, $z_2 = i$ e $z_3 = -2$ nos pontos $w_1 = 1$, $w_2 = i$ e $w_3 = -1$.

Resp. $w = (3z + 2i)/(iz + 6)$.

2. Determine a transformação linear fracionária que leva os pontos $z_1 = -i$, $z_2 = 0$ e $z_3 = i$ nos pontos $w_1 = -1$, $w_2 = i$ e $w_3 = 1$. Em que curva é levado o eixo- y por esta transformação?

3. Determine a transformação bilinear que transforma os pontos $z_1 = \infty$, $z_2 = i$ e $z_3 = 0$ nos pontos $w_1 = 0$, $w_2 = i$ e $w_3 = \infty$.

Resp. $w = -1/z$.

4. Determine a transformação bilinear que leva os pontos z_1 , z_2 e z_3 nos pontos $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ e $w_3 = \infty$.

Resp. $w = [(z - z_1)(z_2 - z_3)]/[(z - z_3)(z_2 - z_1)]$.

5. Determine os pontos fixos das transformações

$$(a) w = \frac{z - 1}{z + 1}; \quad (b) w = \frac{6z - 9}{z}.$$

Resp. (a) $z = \pm i$; (b) $z = 3$.

6. Na transformação bilinear (9), Sec. 34, se $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $w_1 = 0$ e $w_2 = \infty$, isto é, se $z = 0$ e $z = \infty$ são ambos pontos fixos, mostre que a transformação tem a forma $w = az$.

7. Se a origem é um ponto fixo de uma transformação bilinear, mostre que a transformação pode ser escrita na forma

$$w = \frac{z}{cz + d}.$$

8. Quando $z_0 = 0$, mostre que a transformação (8) se reduz a uma rotação dos pontos z em torno da origem, de um ângulo $\theta_1 + \pi$.

9. Quando $\Im(z_1) < 0$, mostre que a transformação (6) leva o semi-plano inferior $y \leq 0$ no disco $|w| \leq 1$.

10. Determine as constantes $\exp(i\theta_0)$ e z_1 na transformação (6), que transforma a região $y \geq 0$ no disco $|w| \leq 1$, de tal modo que as imagens dos pontos $z = \infty$, $z = 0$ e $z = 1$ sejam respectivamente os pontos $w = -1$, $w = 1$ e $w = i$. Quando $z = x$ e $x > 0$, mostre que $y > 0$ e $-1 < u < 1$, de modo que a imagem do eixo real positivo é o semi-círculo superior de $|w| = 1$. Verifique, assim, a transformação exibida na fig. 3, Apêndice 2.

11. A transformação (6) leva o ponto $z = \infty$ no ponto $w = \exp(i\theta_0)$. Se ela transforma a origem $z = 0$ no ponto $w = 1$ e o ponto $z = 1$ no ponto médio $w = \exp(i\theta_0/2)$ do arco $0 < \phi < \theta_0$ do círculo $|w| = 1$, mostre que a transformação pode ser escrita

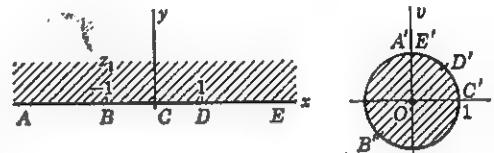
$$w = \exp(i\theta_0) \frac{z + \exp(-i\theta_0/2)}{z + \exp(i\theta_0/2)} \quad (0 < \theta_0 < 2\pi).$$

Eboce uma figura mostrando regiões e pontos correspondentes, inclusive o ponto z_1 cuja imagem é $w = 0$. (Note os casos especiais nos exercícios 10 e 12.)

12. Verifique que o caso especial $\theta_0 = \pi/2$ da transformação no exercício 11 pode ser escrito

$$zw - iz + (w - 1) \exp \frac{i\pi}{4} = 0$$

e que esta transformação transforma o semiplano $y > 0$ e segmentos da fronteira $y = 0$ na maneira indicada na figura 21.



$$\text{Fig. 21. } z = \frac{1 - w}{w - i} \exp \frac{\pi i}{4}$$

13. Se uma transformação bilinear leva os pontos do eixo- x no eixo- u , mostre que os coeficientes na transformação são todos reais, a menos de um fator complexo comum. Note que a recíproca é evidente.

14. Deduza a transformação (8) desta seção. Podem-se utilizar transformações lineares fracionárias sucessivas para transformar o disco $|z| \leq 1$ no semiplano superior do plano- z' e, a seguir, esse semiplano no disco $|w| \leq 1$.

15. Quando $A \neq 0$ na equação (8), Sec. 34, a transformação bilinear pode ser escrita $zw + B'z + C'w + D' = 0$. Escreva as três equações simultâneas que são satisfeitas por B' , C' e D' , se essa transformação leva três pontos distintos z_1 , z_2 e z_3 em três pontos distintos w_1 , w_2 e w_3 , respectivamente, e dê a condição sobre o determinante dos coeficientes de B' , C' e D' sob a qual, as equações podem ser resolvidas em relação a B' , C' e D' em termos de z_n e w_n ($n = 1, 2, 3$). Quando z_n e w_n não satisfazem à condição, mostre que B , C e D na transformação linear $Bz + Cw + D = 0$ podem ser determinados, a menos de um fator comum, de tal modo que z_n seja levado em w_n por essa transformação. Justifica-se, assim, a afirmação, Sec. 34, de que só uma transformação bilinear leva z_n em w_n ($n = 1, 2, 3$).

16. Um conjunto qualquer de elementos que satisfaz às seguintes condições é chamado grupo.
(a) Existe uma regra que associa cada par T e T' de elementos, distintos ou não, de modo que a combinação TT' , chamada "produto", seja um elemento do conjunto. (b) O produto é associativo: $T(TT') = (TT')T$. (c) O conjunto contém um elemento T_0 , denominado *identidade*, tal que $TT_0 = T_0T = T$ para cada elemento T . (d) Cada elemento T tem um inverso T^{-1} tal que $TT^{-1} = T^{-1}T = T_0$. Justifique a afirmação, Sec. 34, de que o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias é um grupo.

17. Use casos particulares $w = az + b$ da transformação linear fracionária para mostrar que TT' e $T'T$ nem sempre são iguais. Isto é, o "produto" nem sempre satisfaz à lei comutativa.

18. Uma transformação linear fracionária T pode ser representada por uma matriz quadrada:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{quando} \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(a) Se a' , b' , c' e d' são os coeficientes correspondentes de uma segunda transformação T' , mostre que a matriz da transformação composta $T[T'(z)]$ é

$$TT' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Este é o *produto matricial* das matrizes para T e T' . (b) Com o auxílio desta regra de multiplicação, mostre que $(TT')T'' = T(T'T'')$, como enunciado na seção 34.

36. A Função $z^{1/2}$. A função multivalente

$$(1) \quad f(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2},$$

onde $z = \exp(i\theta)$, toma dois valores em cada ponto z , exceto na origem, dependendo da escolha de θ . Um valor é o oposto do outro, pois $\exp(i\theta/2)$ muda só em sinal quando θ é acrescido de 2π .

De acordo com a seção 28, a função f pode ser escrita

$$(2) \quad z^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \quad (r > 0).$$

Esta é uma composta da função inteira \exp com a função \log . Quando $\log z$ na fórmula (2) representa um ramo da função multivalente logarítmica (Sec. 26), a mesma fórmula define uma função univalente e analítica de z , um ramo da função bivalente $z^{1/2}$.

O ramo principal f_1 da função (1) é

$$(3) \quad f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z\right) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi).$$

O raio $\theta = \pi$ é o corte de ramo para f_1 . Observe que, mesmo que f_1 fosse definida sobre esse raio estendendo-se o campo de variação de θ na fórmula (3) de modo a incluir o valor $\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$, a função não seria contínua af. Apesar de f_1 ser analítica em alguns pontos, em toda vizinhança de cada ponto $z = x$ ($x \leq 0$), $f_1(z)$ não pode existir em toda a vizinhança. Portanto, cada ponto do corte de ramo, inclusive o ponto de ramificação $z = 0$, é um ponto singular de f_1 . A função $-f_1$,

$$-f_1(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i(\theta + 2\pi)}{2} \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi),$$

é um outro ramo com o mesmo corte de ramo. Os valores $\pm f_1(z)$ representam a totalidade de valores $f(z)$ em todos os pontos, exceto, naturalmente, os pontos do corte de ramo.

Outros ramos de $z^{1/2}$ são

$$(4) \quad f_2(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi),$$

e $-f_2$, cada um tendo o raio $\theta = 0$ como seu corte de ramo. De fato, um ramo com corte $\theta = \alpha$ é dado pelas condições:

$$(5) \quad f_\alpha(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi).$$

Como um corte serve para tornar θ ou $\arg z$ uma função univalente de z , poderiam ser usadas curvas que partem da origem, ao invés de raios, como cortes de ramo. Mas, para se tornar θ univalente, é essencial que todos os cortes de ramo para $z^{1/2}$ partam do ponto de ramificação comum $z = 0$.

Como $z = w^2$ quando $w = z^{1/2}$, a transformação por meio da última função é a mesma que a transformação com sua inversa $w = z^2$ (Sec. 31 e Figs. 1, 2 e 3 no Apêndice 2) e inversão dos planos- w e $-z$.

O ramo f_2 , definido pela equação (4), transforma o domínio consistindo de todo o plano- z menos o raio $\theta = 0$ no domínio $v > 0$, semiplano superior do plano- w . O mesmo transforma cada domínio $|z| < r_0$, $0 < \theta < 2\pi$, consistindo de todos os pontos interiores de um disco circular, exceto aqueles que estão sobre os raios $\theta = 0$, $0 \leq r < r_0$, no semi-disco aberto $|w| < \sqrt{r_0}$, $v > 0$ (Fig. 22). Ambas as transformações acima consideradas são biunívocas. Note, porém, que pontos interiores ao disco próximos do raio $\theta = 0$ têm imagens na proximidade da fronteira $v = 0$ do semi-disco.



FIG. 22. $w = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (0 < \theta < 2\pi)$.

37. Outras Funções Irracionais. Pode-se escolher um corte de ramo para a função $z^{1/n}$, onde n é um inteiro, como sendo qualquer raio partindo da origem. Vamos escolher o eixo real negativo como corte de ramo para a função $f(z) = z^{1/3}$, por exemplo. Cada uma das três funções

$$(1) \quad f_k(z) = \sqrt[3]{r} \exp \frac{i(\theta + 2\pi k)}{3} \quad (k = 0, 1, 2; r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

é um ramo de f , visto que f_k é univalente e analítica em todos os pontos exceto nos do corte $\theta = \pi$ e no ponto de ramificação $z = 0$. O ramo principal f_0 transforma o plano- z menos o corte no domínio angular $\rho > 0$, $-\pi/3 < \phi < \pi/3$ no plano- w , onde

$$w = \rho \exp(i\phi) = f_0(z).$$

O ramo f_1 transforma o plano- z cortado no domínio $\rho > 0$, $\pi/3 < \phi < \pi$, e f_2 o leva em $\rho > 0$, $-\pi < \phi < 5\pi/3$. As três transformações são biunívocas.

Se $z - z_0 = r' \exp(i\theta')$, um ramo da função bivalente $(z - z_0)^{1/2}$ é definido pela fórmula

$$(2) \quad (z - z_0)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r'} \exp \frac{i\theta'}{2} \quad (r' > 0, 0 < \theta' < 2\pi).$$

Esta função univalente de z é analítica no seu domínio de definição, visto que ela é uma função analítica da função inteira $z - z_0$. O corte de ramo é o raio $\theta' = 0$ que se estende à direita do ponto de ramificação $z = z_0$. O ramo (2) transforma o plano- z cortado ($r' > 0$, $0 < \theta' < 2\pi$), numa maneira biunívoca, no semiplano superior ($\rho > 0$, $0 < \phi < \pi$) do plano- w .

Como exemplo instrutivo, mas menos elementar, de funções iracionais, vamos considerar um ramo da função bivalente $(z^2 - 1)^{1/2}$. É útil representar z por cada um dos dois pares de coordenadas polares (Fig. 23):

$$(3) \quad z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2).$$

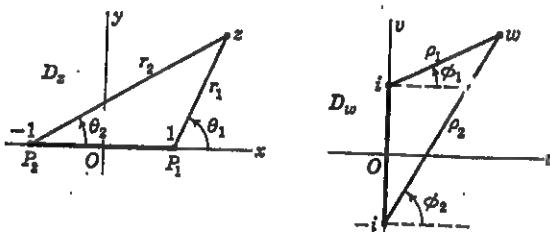


Fig. 23. $w = g(z)$.

Mostraremos que a função g ,

$$(4) \quad g(z) = (z - 1)^{\frac{1}{2}}(z + 1)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2})(\sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2}),$$

é um ramo de $(z^2 - 1)^{1/2}$ que é definido em todo o domínio

$$(5) \quad D_z: \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 < 2\pi, \\ r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad r_1 + r_2 > 2.$$

As coordenadas polares na fórmula (4) são restritas aos campos de variação prescritos pelas condições (5). Como $r_1 + r_2$ deve ser maior do que o comprimento do segmento P_1P_2 do eixo- x entre os dois pontos $z = \pm 1$, o domínio D_z contém todos os pontos, exceto os do segmento fechado P_1P_2 . Note que $g(z)$ pode ser escrita como $\sqrt{r_1r_2} \exp[i(\theta_1 + \theta_2)/2]$.

De acordo com a definição (4), g é o produto de dois ramos do tipo (2) cujos cortes de ramo são os raios $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$. Consequentemente g é analítica sempre que $z \neq \pm 1$ ou $\theta_2 \neq 0$. O ramo $\sqrt{r_1} \exp(i\theta_1/2)$ é contínuo, de fato, analítico, em cada ponto interior do segmento P_1P_2 ; mas o valor do ramo $\sqrt{r_2} \exp(i\theta_2/2)$ dá um salto de $\sqrt{r_2}$ para $-\sqrt{r_2}$ quando o ponto z atravessa esse segmento. Logo $g(z)$ tem um salto de $2\sqrt{r_1r_2}$ af, de modo que g não é analítica sobre P_1P_2 .

Podemos mostrar que g é analítica sobre o raio $\theta_1 = 0$, $r_1 > 0$, pois esse raio se estende ao longo de $\theta_2 = 0$. Com efeito, se escrevemos

$$(6) \quad G(z) = (\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2})(\sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2}) \\ (r_1r_2 > 0, -\pi < \theta_k < \pi, k = 1, 2),$$

então G é um produto de dois ramos principais que é analítico sobre o raio $\theta_1 = \theta_2 = 0$, de fato, quando $\theta_1 \neq 0$ e $r_1 > 0$. Ora, $G(z) = g(z)$ quando o ponto z se encontra acima de ou sobre o raio $\theta_1 = 0$, pois, nesse caso, $\theta_k = \theta_k$ ($k = 1, 2$). Quando o ponto z está abaixo desse raio, $\theta_k = \theta_k - 2\pi$; assim, $\exp(i\theta_k/2) = -\exp(i\theta_k/2)$, e de novo $G(z) = g(z)$. Logo g é analítica em todo o domínio $x > 1$, e sobre o raio $\theta_1 = 0$ em particular.

Como g é univalente e analítica em D_z , mas não sobre P_1P_2 , e como $|g(z)|^2 = z^2 - 1$, g é um ramo de $(z^2 - 1)^{1/2}$ com corte de ramo P_1P_2 e pontos de ramificação $z = \pm 1$.

Sob a transformação

$$(7) \quad w = \rho \exp(i\phi) = g(z),$$

$$\text{ou} \quad \rho = \sqrt{r_1r_2}, \quad \phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

a imagem de cada ponto do semiplano superior $0 < \theta_k < \pi$ é algum ponto do semiplano superior $0 < \phi < \pi$; analogamente, ϕ varia entre π e 2π quando θ_k faz o mesmo. As imagens dos raios $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ são os eixos reais positivo e negativo $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, respectivamente. Pontos próximos do corte P_1P_2 são transformados em pontos próximos do segmento do eixo- v entre $w = i$ e $w = -i$. O resto do eixo- v é a imagem do eixo- y .

Quando $0 < \theta_k < \pi$ ($k = 1, 2$), ou quando $\theta_1 = 0$,

$$g(-z) = [-(z + 1)]^{\frac{1}{2}}[-(z - 1)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1r_2} \exp \frac{i(\theta_2 + \pi)}{2} \exp \frac{i(\theta_1 + \pi)}{2};$$

assim, $g(-z) = -g(z)$. Quando $\pi < \theta_k < 2\pi$, ou quando $\theta_2 = \pi$, os argumentos de $-(z \pm 1)$ são $\theta_k - \pi$, e de novo $g(-z) = -g(z)$. O ramo g é portanto uma função ímpar,

$$(8) \quad g(-z) = -g(z) \quad (z \text{ em } D_z),$$

embora a função bivalente $(z^2 - 1)^{1/2}$ seja, num sentido, par.

Dois pontos distintos nunca têm a mesma imagem w se $w \neq 0$. Com efeito, se $g(z) = w$ e $g(Z) = w$, então $[g(z)]^2 = [g(Z)]^2$; isto é,

$$z^2 - 1 = Z^2 - 1$$

e, daí, ou $Z = z$ ou $Z = -z$. Como $g(z) = w$,

$$g(-z) = -w \neq w;$$

logo $Z = z$. Concluímos que todo par de pontos distintos de D_z é transformado em algum par de pontos distintos de um domínio D_w que pode ser descrito como segue (Fig. 23).

$$(9) \quad D_w: \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi_1 < \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi_2 < \frac{3\pi}{2}, \\ \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0, \quad \rho_1 + \rho_2 > 2,$$

onde $w - i = \rho_1 \exp(i\phi_1)$, $w + i = \rho_2 \exp(i\phi_2)$.

Ora, pode-se definir um ramo g^{-1} da função bivalente $(w^2 + 1)^{1/2}$ no domínio D_w , consistindo de todos os pontos do plano- w , exceto os do segmento $-1 \leq v \leq 1$ do eixo- v , escrevendo-se

$$(10) \quad g^{-1}(w) = (w - i)^{\frac{1}{2}}(w + i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp \frac{i\phi_1}{2} \exp \frac{i\phi_2}{2},$$

onde as coordenadas polares satisfazem às condições (9). Pelos métodos usados acima para a função g , podemos mostrar que g^{-1} é analítica em todo o D_w , tendo como seu corte de ramo o segmento do eixo- v entre os pontos de ramificação $w = \pm i$. Também, a transformação $z = g^{-1}(w)$ leva cada ponto de D_w num ponto de D_z , de tal modo que $y > 0$ quando $v > 0$, $y < 0$ quando $v < 0$, $y = 0$ e $x > 1$ quando $v = 0$ e $u > 0$, e $y = 0$ e $x < -1$ quando $v = 0$ e $u < 0$. Como

$$z^2 = [g^{-1}(w)]^2 = w^2 + 1,$$

$w^2 = z^2 - 1$, e, portanto, ou $w = g(z)$ ou $w = -g(z)$. A maneira como g^{-1} e g transformam os semiplanos superior e inferior e os semi-eixos reais positivo

e negativo mostra que $w = g(z)$. Logo, cada ponto de D_w é a imagem de um ponto $z = g^{-1}(w)$ de D_z sob a transformação $w = g(z)$.

O ramo g , portanto, transforma D_z em D_w de maneira biunívoca. Além disso, quando $w = g(z)$, podemos ver que $z = g^{-1}(w)$. Assim, as funções analíticas g e g^{-1} são inversas uma da outra.

Ramos das funções bivalentes

$$(11) \quad w = (z^2 + Az + B)^{\frac{1}{2}} = [(z - z_0)^2 - z_1^2]^{\frac{1}{2}},$$

onde $A = -2z_0$ e $B = z_0^2 - z_1^2$, e transformações por esses ramos, podem ser tratadas com o auxílio dos resultados obtidos para g acima, e das transformações sucessivas

$$(12) \quad z - z_0 = z_1 Z, \quad W = (Z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad w = z_1 W.$$

38. A Transformação $w = \exp z$. A transformação

$$w = e^z, \quad \text{ou} \quad \rho e^{i\phi} = e^x e^{iy},$$

onde $w = \rho \exp(i\phi)$, pode ser escrita

$$\rho = e^x, \quad \phi = y.$$

A transformação, portanto, leva as retas $x = c$ nos círculos $\rho = \exp c$, e as retas $y = 0$ nos raios $\phi = c$.

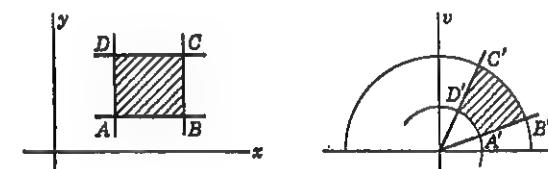


FIG. 24. $w = e^z$.

A região retangular $c_1 \leq x \leq c_2$, $c_3 \leq y \leq c_4$ é transformada na região

$$\exp c_1 \leq \rho \leq \exp c_2, \quad c_3 \leq \phi \leq c_4$$

delimitada por círculos e raios. Esta transformação é biunívoca se $c_4 - c_3 < 2\pi$. As duas regiões e as partes correspondentes das suas fronteiras são ilustradas na figura 24. Em particular, se $c_3 = 0$ e $c_4 = \pi$, de modo que $0 \leq y \leq \pi$, o retângulo é transformado na metade de um anel circular, como mostra a figura 8 do Apêndice 2.

Quando x percorre todos os valores positivos e negativos, o raio vetor ρ percorre todos os valores positivos; $\rho \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$. Quando y varia de zero a π , ϕ varia de zero a π . Assim, a faixa infinita $0 \leq y \leq \pi$ é transformada no semiplano superior- w , $0 \leq \phi \leq \pi$. A imagem do ponto $z = 0$ é o ponto $w = 1$, e a de $z = \pi i$ é $w = -1$. As partes correspondentes das fronteiras das duas regiões são ilustradas na figura 6 do Apêndice 2. Esta transformação de uma faixa num semi-plano é particularmente útil nas aplicações.

A faixa semi-infinita $x \leq 0$, $0 \leq y \leq \pi$ é transformada no semicírculo $\rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$ (Fig. 7, Apêndice 2).

A imagem da faixa infinita $-\pi \leq y \leq \pi$ é todo o plano- w , mas a transformação não é biunívoca sobre o raio $\phi = \pi$. Quando $-\pi < y < \pi$, então $-\pi < \phi < \pi$, e a transformação $w = \exp z$ pode ser escrita

$$z = \operatorname{Log} w = \operatorname{Log} \rho + i\phi \quad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi).$$

O ramo principal $\operatorname{Log} w$ tem o raio $\phi = \pi$ como seu corte de ramo. Cada ponto do plano- w cortado é a imagem de um único ponto da faixa aberta $-\pi < y < \pi$ no plano- z , e reciprocamente. A função exponencial também transforma a faixa $\pi < y < 3\pi$, de modo biunívoco, no mesmo plano- w cortado ($\phi \neq \pi$, $\rho > 0$); de fato, a imagem de cada faixa $(2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) é esse plano cortado.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que a transformação $w = z^{1/2} = \sqrt{r} \exp(i\theta/2)$, onde $0 < \theta < 2\pi$, leva o domínio entre as duas parábolas

$$r = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}, \quad \text{e} \quad r = \frac{2c^2}{1 - \cos \theta},$$

de modo biunívoco, na faixa $b < y < c$, onde $c > b > a$.

2. Mostre que a transformação $z = w^{1/2}$, onde $w^{1/2}$ é o ramo principal da função bivalente, transforma a região triangular delimitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $x = 1$, na região delimitada pelo eixo- y e pela parábola $\rho = 2/(1 + \cos \phi)$. Mostre partes correspondentes das fronteiras das duas regiões.

3. O ramo g de $(z^2 - 1)^{1/2}$ foi definido na seção 37 em termos de r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 . Mostre, geometricamente, porque as condições $r_1 > 0$, $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ descrevem o quadrante $x > 0$, $y > 0$ do plano- z . (Note que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ em cada ponto do eixo- y positivo, e que $\theta_1 + \theta_2$ decresce quando o ponto se desloca à direita ao longo de um raio $\theta_2 = c$, onde $0 < c < \pi/2$.) Que condição satisfaz $\theta_1 + \theta_2$ quando o ponto z se encontra fora $y > 0$ do plano- w , sob a transformação $w = g(z)$.

4. Para a transformação $w = g(z)$ do primeiro quadrante do plano- z no primeiro quadrante do plano- w (Exercício 3), mostre que

$$(a) u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 + x^2 - y^2 - 1}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 - x^2 + y^2 + 1},$$

onde $r_1^2 r_2^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$, e que (b) a imagem da parte B ($x > 0$, $y > 0$) da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é o raio $v = u$, $u > 0$.

5. No exercício 4, mostre que o domínio D , que se situa abaixo da parte B da hipérbole e no primeiro quadrante do plano- z , é descrito pelas condições $r_1 > 0$, $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi/2$. Mostre, então, que a imagem de D é o octante $0 < v < u$. Esboce os domínios.

6. Quando g é o ramo de $(z^2 - 1)^{1/2}$ definido na seção 37 e quando $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$, onde $r_0 > 0$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, mostre que um ramo g_0 de $(z^2 - z_0^2)^{1/2}$, cujo corte de ramo é o segmento entre os pontos z_0 e $-z_0$, é definido pela fórmula

$$g_0(z) = z_0 g\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{onde} \quad Z = \frac{z}{z_0}.$$

7. Escreva $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ e $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$, onde $0 < \theta_1 < 2\pi$ e $-\pi < \theta_2 < \pi$, para definir um ramo da função

$$(a) (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (b) \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

cujo corte de ramo consiste dos dois ramos $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$.

8. Na notação usada na seção 37, mostre que a função h , onde

$$h(z) = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp\left(\frac{i(\theta_1 - \theta_2)}{2}\right),$$

é um ramo com o mesmo domínio de definição D_z e o mesmo corte de ramo $P_1 P_2$ (Fig. 23) que g ; que a transformação $w = h(z)$ leva D_z no semiplano direito- w ($\rho > 0$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$), com o ponto $w = 1$ como imagem do ponto $z = \infty$. A transformação inversa é

$$z = \frac{1 + w^2}{1 - w^2}, \quad (w > 0).$$

9. Mostre que a transformação $w = h(z)$ definida no exercício 8, transforma a região que é a intersecção do exterior do círculo $|z| = 1$ com o semiplano superior- z na região angular no primeiro quadrante entre a reta $v = u$ e o eixo- u . Mostre as regiões graficamente.

10. Escreva $z = r \exp(i\theta)$, $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$, $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$, onde os valores de todos os ângulos variam entre $-\pi$ e π , e defina um ramo da função $[z(z^2 - 1)]^{1/2}$ cujo corte de ramo consiste dos dois segmentos $x \leq -1$ e $0 \leq x \leq 1$ do eixo- x .

11. Sob a transformação $w = \exp z$, mostre que as retas $ky = x$ são transformadas nas espirais $\rho = \exp(k\phi)$.

12. Verifique a transformação de regiões e fronteiras ilustradas na figura 7 do Apêndice 2, sob a transformação $w = \exp z$.

13. Sob a transformação $w = \exp z$, determine a imagem da faixa semi-infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$ e exiba partes correspondentes das fronteiras.

14. Defina um ramo de $\log(z - 1)$ que transforme o plano- z cortado, o plano menos o segmento $x \geq 1$ do eixo real, na faixa $0 < v < 2\pi$ no plano- w .

39. A Transformação $w = \operatorname{sen} z$. Como

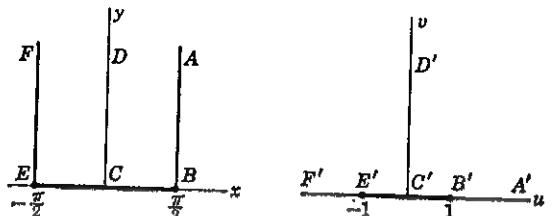
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

a transformação $w = \operatorname{sen} z$ pode ser escrita

$$u = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Se $x = \pi/2$, então $u = \operatorname{ch} y$ e $v = 0$. Assim, a reta $x = \pi/2$ é transformada na parte $u \geq 1$ do eixo real no plano- w . Esta transformação é biunívoca para cada

uma das semi-retas, superior ou inferior, da reta $x = \pi/2$; quando y varia de zero ao infinito por valores positivos, ou por valores negativos, u varia de um ao infinito.

Fig. 25. $w = \operatorname{sen} z$.

Se $y = 0$, então $u = \operatorname{sen} x$ e $v = 0$. Lógico todo o eixo- x é transformado no segmento $-1 \leq u \leq 1$ do eixo- u , mas esta transformação não é biunívoca. De fato, o segmento $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ do eixo- x é transformado univocamente nesse segmento. A imagem da semi-reta superior do eixo- y é a semi-reta superior do eixo- v , e a da inferior é a parte inferior do mesmo eixo, visto que $u = 0$ e $v = \operatorname{sh} y$ quando $x = 0$. A transformação dessas retas é ilustrada na figura 25.

A imagem do segmento $y = c$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, é a semi-ellipse, cujas equações paramétricas são

$$u = \operatorname{ch} c \operatorname{sen} x, \quad v = \operatorname{sh} c \cos x.$$

Se $c > 0$, então $v \geq 0$, e as equações acima representam a parte superior da elipse

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1;$$

se $c < 0$, elas representam a parte inferior (Fig. 26). Cada ponto do segmento é transformado num ponto da semi-ellipse, e reciprocamente, de acordo com as equações paramétricas acima. Os focos da elipse são os pontos $w = \pm 1$, que são independentes do valor de c .

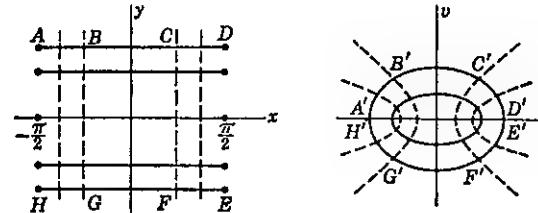
A imagem da reta $x = c$, onde $-\pi/2 < x < \pi/2$, é a curva

$$u = \operatorname{sen} c \operatorname{ch} y, \quad v = \cos c \operatorname{sh} y,$$

que é a parte direita da hipérbole

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

se $c > 0$, e é a parte esquerda se $c < 0$. A transformação é biunívoca. Os pontos $w = \pm 1$ são os focos desta hipérbole.

Fig. 26. $w = \operatorname{sen} z$.

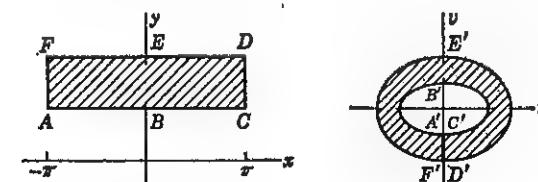
Cada ponto dado no semiplano superior- w é um ponto de uma das semi-ellipses bem definida; portanto ele corresponde a um único ponto de um segmento horizontal bem definido, isto é, a um único ponto da faixa semi-infinita

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \geq 0$$

no plano- z . Também, a cada ponto da faixa acima corresponde um único ponto w . Logo a transformação dessa faixa no semiplano superior- w é biunívoca (Fig. 9, Apêndice 2). A imagem da parte $0 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ dessa faixa é o primeiro quadrante do plano- w (Fig. 10, Apêndice 2).

O retângulo $-\pi \leq x \leq \pi, c_1 \leq y \leq c_2$ é transformado na região delimitada por duas elipses confocais, como mostra a figura 27. Note, porém, que os dois lados $x = \pm \pi$ são transformados no segmento $u = 0, v = -\operatorname{sh} y$ ($c_1 \leq y \leq c_2$); assim se $c_1 > 0$, a imagem do domínio retangular é o anel elíptico com um corte ao longo do eixo- v negativo. Quando o ponto z descreve a fronteira do retângulo, sua imagem perfaz um circuito percorrendo primeiro uma elipse, e depois o corte e a outra elipse, e de novo o corte e a elipse original, onde se encontra o ponto de partida, como sugere a figura.

A região retangular $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq c$ é transformada biunivamente numa região semi-elíptica na maneira ilustrada na figura 11 do Apêndice 2.

Fig. 27. $w = \operatorname{sen} z$.

40. Transformações Sucessivas. Como $\cos z = \operatorname{sen}(z + \pi/2)$, a transformação

$$w = \cos z$$

pode ser escrita sucessivamente como

$$w = \operatorname{sen} z', \quad z' = z + \frac{\pi}{2}.$$

A última transformação é uma translação de $\pi/2$, para a direita, de cada ponto do plano- z . Portanto, a transformação $w = \cos z$ é a mesma que a transformação $w = \operatorname{sen} z$ precedida da translação, à direita, de $\pi/2$ unidades.

A transformação

$$w = \operatorname{sh} z$$

pode ser escrita $iw = \operatorname{sen}(iz)$, ou

$$w' = \operatorname{sen} z', \quad z' = iz, \quad w' = iw.$$

Ela é portanto a combinação da transformação $w = \operatorname{sen} z$ com a rotação dos eixos, em cada plano, do ângulo $\pi/2$. Analogamente, a transformação

$$w = \operatorname{ch} z$$

é essencialmente a mesma que $w = \cos z$.

Como outro exemplo de transformações sucessivas, consideremos

$$w = (\operatorname{sen} z)^{1/2},$$

onde a potência fracionária designa o ramo principal. Escrevemos

$$w' = \operatorname{sen} z, \quad w = (w')^{1/2}.$$

Vimos na secção precedente que a primeira transforma a faixa semi-infinita $0 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ no primeiro quadrante. A segunda transforma o quadrante num octante. As transformações sucessivas de regiões e fronteiras que levam a faixa do plano- z num octante do plano- w são ilustradas na figura 28.

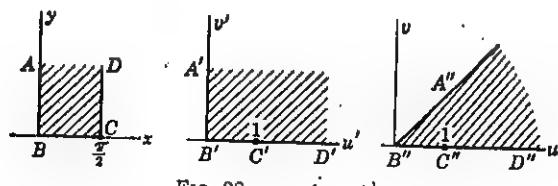


Fig. 28. $w = (\operatorname{sen} z)^{1/2}$.

A transformação linear fracionária

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

leva o semiplano $x \geq 0$ no círculo unitário $|w| \leq 1$ (Fig. 12, Apêndice 2). É fácil ver que esta transformação também leva o semiplano $y \geq 0$ no semiplano $v \geq 0$. Como a transformação $w' = \operatorname{Log} w$, ou $w = \exp w'$, leva o semiplano $v \geq 0$ na faixa $0 \leq v' \leq \pi$ (Fig. 6, Apêndice 2), segue-se que a transformação

$$w' = \operatorname{Log} \frac{z - 1}{z + 1}$$

leva o semiplano na faixa. A ordem dos pontos correspondentes nas fronteiras é indicada na figura 19 do Apêndice 2.

41. Tabela de Transformações de Regiões. O apêndice 2 consiste em um conjunto de figuras, mostrando a transformação de regiões simples e úteis por várias funções elementares. Em cada caso existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da região e os da sua imagem. Partes correspondentes de fronteiras são indicadas por letras. A tabela inclui algumas transformações que não foram discutidas no texto. A verificação das mesmas é deixada como exercício para o estudante. Várias das transformações apresentadas no Apêndice 2 podem ser deduzidas por meio da transformação de Schwarz-Christoffel (Cap. 10).

EXERCÍCIOS

1. Mostre que a transformação $w = \operatorname{ch} z$ leva os pontos $z = iy$ ($0 \leq y \leq \pi/2$) no segmento $0 \leq u \leq 1$ do eixo- u .
2. Sob a transformação $w = \operatorname{ch} z$, mostre que a imagem da faixa semi-infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$ é o primeiro quadrante do plano- w e indique partes correspondentes das fronteiras das regiões.
3. Sob a transformação $w = \operatorname{sen} z$, mostre que as imagens dos lados do retângulo $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq 1$, são os segmentos e o arco $D'E'$ indicados na figura 29, onde $D'E'$ é um

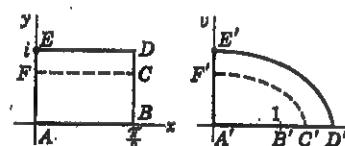


Fig. 29. $w = \operatorname{sen} z$, $A'D' = \operatorname{ch} 1$, $A'E' = \operatorname{sh} 1$.

4. Complete a transformação indicada na figura 29, usando a transformação dos segmentos $y = c$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) para provar que a transformação $w = \operatorname{sen} z$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos da região retangular e os da região $A'B'D'E'$.
5. Verifique a transformação por $\operatorname{sen} z$ ilustrada na figura 10, Apêndice 2.
6. Verifique a transformação por $\operatorname{sen} z$ ilustrada na figura 11, Apêndice 2.
7. Descreva a transformação $w = \operatorname{ch} z$ em termos da transformação $w = \operatorname{sen} z$ e de rotações e translações.
8. Mostre que a transformação $w = \operatorname{sen}^2 z$ leva a região $0 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ na região $v \geq 0$, e indique partes correspondentes das fronteiras.

9. Sob a transformação $w = (\operatorname{sen} z)^{1/4}$, mostre que a faixa $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$ é transformada na parte do primeiro quadrante que fica abaixo da reta $v = u$, e determine as partes correspondentes das fronteiras.

10. Verifique a transformação, por $w = 1/z$, das regiões e partes das fronteiras indicadas (a) na figura 4, Apêndice 2; (b) na figura 5, Apêndice 2.

11. Verifique a transformação ilustrada na figura 12, Apêndice 2, pela função $w = (z - 1)/(z + 1)$.

12. Mostre que a transformação bilinear $z' = (z - 1)/(z + 1)$ transforma o eixo- x no eixo- x' , o segmento $-1 \leq x \leq 1$ desse eixo no semi-eixo- x' negativo, o semiplano $y > 0$ no semiplano $y' > 0$, e $y < 0$ em $y' < 0$. Quando se utiliza o ramo principal $(z')^{1/2}$, mostre que a transformação composta

$$w = (z')^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

leva o plano- z , exceto o segmento $-1 \leq x \leq 1$ do eixo- x , no semiplano $u > 0$ (compare com o exercício 8, Sec. 38).

13. Usando a representação polar de z , mostre a transformação

$$w = z + \frac{1}{z}$$

leva as duas partes, superior e inferior, do círculo $r = 1$ no segmento $-2 \leq u \leq 2$, $v = 0$.

14. Mostre que a transformação $w = z + 1/z$ leva o círculo $r = c$ na elipse

$$u = \left(c + \frac{1}{c}\right) \cos \theta, \quad v = \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin \theta.$$

15. Verifique a transformação indicada na figura 16, Apêndice 2, pela função $w = z + 1/z$.

16. Descreva a transformação pela função $w = \operatorname{ch} z$ em termos das transformações $w = e^z$ e $2w = z + 1/z$.

CAPÍTULO 5

Integrais

O leitor poderá passar diretamente para os capítulos sobre transformações conformes e suas aplicações se assim desejar. Poderia parecer mais natural apresentar esses capítulos agora, que acabamos de completar um estudo sobre transformações por funções elementares. Deve-se notar, porém, que ainda não estabelecemos a continuidade das derivadas parciais primeira e segunda das partes real e imaginária, $u(x, y)$ e $v(x, y)$, de uma função analítica. Se abordarmos tópicos sobre transformações conformes neste momento, seremos obrigados a admitir tal continuidade; para estabelecer-la, precisamos lançar mão da teoria das integrais de funções analíticas.

A teoria das integrais curvilíneas, junto com a de séries de potências e resíduos, constitui parte importante da teoria das funções de variáveis complexas, que se destaca por sua elegância matemática. Os teoremas são geralmente concisos e poderosos, e a maioria das demonstrações é simples. A teoria também sobressai por sua grande utilidade tanto na matemática pura como na aplicada. Apresentaremos uma introdução substancial a esta teoria neste e nos subsequentes capítulos.

42. Integrais Definidas. Para introduzirmos de maneira simples, a integral curvilínea de $f(z)$, definimos primeiro a integral definida de uma função complexa F de uma variável real t .

Escrevemos

$$(1) \quad F(t) = U(t) + iV(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

onde U e V são funções reais *seccionalmente contínuas*, ou contínuas por partes, da variável real t num intervalo limitado (a, b) , isto é, cada uma dessas funções é tal que o intervalo consiste de um número finito de subintervalos em cada um dos quais a função é contínua e tem limites finitos quando t tende para as extremidades. Tais funções são, portanto, contínuas no intervalo, exceto, no máximo, para um número finito de saltos finitos. Definimos, então, a integral definida de F em termos de duas integrais definidas reais, que certamente existem, pela fórmula

$$(2) \quad \int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt.$$

Desta definição segue-se que

$$(3) \quad \Re \int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt = \int_a^b \Re[F(t)] dt.$$

Além disso, se k é uma constante complexa, $k = k_1 + ik_2$, então

$$\begin{aligned} \int_a^b kF dt &= \int_a^b (k_1 U - k_2 V) dt + i \int_a^b (k_1 V + k_2 U) dt \\ &= (k_1 + ik_2) \left(\int_a^b U dt + i \int_a^b V dt \right); \end{aligned}$$

isto é,

$$(4) \quad \int_a^b kF(t) dt = k \int_a^b F(t) dt.$$

Tal como no caso real, valem, aqui também, propriedades tais como as da inversão de limites de integração e integrais de soma.

Para estabelecer uma outra propriedade básica, sejam r_0 e θ_0 o valor absoluto e um argumento do número complexo representado pela integral (2), onde r_0 é suposto diferente de zero, isto é,

$$(5) \quad \int_a^b F(t) dt = \boxed{r_0 \exp(i\theta_0)}, \quad r_0 = \left| \int_a^b F(t) dt \right|.$$

Quando $(\bar{k} = \exp(-i\theta_0))$, segue-se, da fórmula (4), que

$$\int_a^b e^{-i\theta_0} F(t) dt = e^{-i\theta_0} \int_a^b F(t) dt = r_0.$$

Note que r_0 é real e positivo. Então, em vista da fórmula (4),

$$r_0 = \Re \int_a^b e^{-i\theta_0} F(t) dt = \int_a^b \Re(e^{-i\theta_0} F) dt > 0;$$

$$\text{mas} \quad \int_a^b \Re(e^{-i\theta_0} F) dt \leq \int_a^b |\Re(e^{-i\theta_0} F)| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} F| dt$$

desde que $a < b$. Como $|\exp(-i\theta_0)| = 1$, segue-se que

$$r_0 \leq \int_a^b |F| dt;$$

isto é,

$$(6) \quad \left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt \quad (a \leq b)$$

Esta desigualdade também é verdadeira para $r_0 = 0$, já que o primeiro membro se anula nesse caso.

43. Caminhos. Introduziremos aqui algumas classes de curvas adequadas ao estudo de integrais curvilíneas.

Um arco contínuo é definido como um conjunto de pontos (x, y) tais que

$$(1) \quad x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

onde ϕ e ψ são funções contínuas do parâmetro real t . A definição estabelece uma transformação contínua de pontos t do intervalo (a, b) no arco e uma orientação dos pontos (x, y) de acordo com o sentido de crescimento de t . Se nenhum par de valores distintos de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , o arco se diz arco de Jordan. Mas se $\phi(a) = \phi(b)$ e $\psi(a) = \psi(b)$, e nenhum outro par de valores distintos de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , então, o arco contínuo é uma *curva simples fechada*, ou curva de Jordan.

A poligonal

$$(2) \quad x = t \quad (0 \leq t \leq 2), \quad y = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & (1 \leq t \leq 2), \end{cases}$$

isto é, $y = x$ ($0 \leq x \leq 1$), $y = 1$ ($1 \leq x \leq 2$), é um exemplo de arco de Jordan. Aqui o parâmetro t é mesmo que a coordenada x . O círculo

$$(3) \quad x = r_0 \cos t, \quad y = r_0 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

é um exemplo de curva simples fechada.

Se as funções ϕ e ψ nas equações (1) têm derivadas contínuas $\phi'(t)$ e $\psi'(t)$, que não se anulam simultaneamente para qualquer valor de t , então o arco tem uma tangente que varia continuamente de posição. O arco, ou a curva, é, então, suave. Seu comprimento é determinado e dado pela fórmula:

$$(4) \quad L = \int_a^b \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (a \leq b).$$

Um *caminho* é uma cadeia contínua de um número finito de arcos suaves. Se as equações (1) representam um caminho, então ϕ e ψ são contínuas enquanto que ϕ' e ψ' são seccionalmente contínuas. A poligonal (2), por exemplo, é um caminho. Se o caminho é fechado e não se intercepta, então, é uma curva de Jordan seccionalmente suave, chamada *caminho fechado*. Contornos de triângulos e de retângulos são exemplos. O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos dos arcos suaves que o compõem; ele é dado pela integral (4) quando as equações (1) representam o caminho.

Qualquer curva de Jordan C , e portanto qualquer caminho fechado, divide o plano em dois domínios, os quais têm os pontos de C como seus únicos pontos de fronteira. Um desses domínios, chamado interior de C , é limitado; o outro, exterior de C , é ilimitado. Esta afirmação é conhecida como teorema de Jordan e sua demonstração não é simples. Aceitá-la-emos como geometricamente óbvia¹.

¹Cf. Cap. 6 do livro de Dienes citado no Apêndice 1

Vamos introduzir um novo parâmetro r nas equações paramétricas (1) de um caminho fazendo

$$(5) \quad t = p(r),$$

onde p é contínua com derivada seccionalmente contínua $p'(r)$, e $p'(r) > 0$, de modo que t cresce com r . Então, se $p(c) = a$ e $p(d) = b$, as equações paramétricas tomam a forma

$$(6) \quad x = \phi[p(r)] = \Phi(r), \quad y = \psi[p(r)] = \Psi(r) \quad (c \leq r \leq d).$$

Estas equações representam uma transformação contínua de pontos do intervalo $c \leq r \leq d$ no caminho C , orientado de acordo com o sentido de crescimento de r , e portanto de t . Ora,

$$\phi'(t) = \Phi'(r) \frac{dr}{dt} = \frac{\Phi'(r)}{p'(r)}, \quad \psi'(t) = \frac{\Psi'(r)}{p'(r)},$$

e a integral na fórmula (4) para o comprimento de C é transformada em

$$\int_c^d \sqrt{[\Phi'(r)]^2 + [\Psi'(r)]^2} \frac{1}{p'(r)} p'(r) dr.$$

Portanto,

$$L = \int_c^d \sqrt{[\Phi'(r)]^2 + [\Psi'(r)]^2} dr \quad (c \leq d);$$

isto é, o número L dado pela fórmula (4) é invariante sob tais mudanças na representação paramétrica de C .

44. Integrais Curvilíneas. A integral de uma função f da variável complexa z de um ponto $z = \alpha$ a um ponto $z = \beta$ é definida em termos dos valores $f(z)$ nos pontos de um arco C que se estende do ponto α ao ponto β . A integral é, portanto, uma integral curvilínea. Seu valor pode depender da escolha do arco C bem como de f , α e β . Embora a integral

$$(1) \quad \int_C f(z) dz \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(z) dz$$

possa ser definida diretamente como limite de uma soma, uma definição em termos de integrais definidas do tipo introduzido na Sec. 42 apresenta algumas vantagens.

Seja C um caminho que se estende de α a β e escrevemos $z = x + iy$. Então, quando z está sobre C ,

$$(2) \quad x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

onde ϕ e ψ são contínuas e ϕ' e ψ' são seccionalmente contínuas; também $z = \alpha$ quando $t = a$ e $z = \beta$ quando $t = b$. Seja f seccionalmente contínua sobre C , isto é, as partes real e imaginária de f são funções seccionalmente contínuas de t . Definimos então a integral (1) pela fórmula

$$(3) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f[\phi(t) + i\psi(t)] [\phi'(t) + i\psi'(t)] dt.$$

A integral no segundo membro existe, visto que seu integrando é uma função complexa seccionalmente contínua da variável real t (Sec. 42).

Se u e v designam as partes de f , então, quando z está sobre C ,

$$f(z) = u + iv = u[\phi(t), \psi(t)] + iv[\phi(t), \psi(t)]$$

e nossa definição (3) pode ser escrita, seja em termos de integrais definidas reais com integrandos seccionalmente contínuos,

$$(4) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b (u\phi' - v\psi') dt + i \int_a^b (u\psi' + v\phi') dt,$$

ou em termos de integrais curvilíneas reais,

$$(5) \quad \int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx).$$

Observe que estas representações podem ser obtidas formalmente substituindo f por $u + iv$ e dz por $dx + idy$ e, a seguir, desenvolvendo o integrando.

A menos que se indique o contrário, consideraremos integrais sobre caminhos tais como definidos na Sec. 43, onde os integrandos são funções seccionalmente contínuas sobre esses caminhos. Assim, a integral curvilínea (1) também é chamada *integral de caminho*.

De acordo com a fórmula (3) ou (4), a integral de β a α sobre um dado caminho C é descrita em termos de integrais definidas de $t = b$ a $t = a$, e portanto

$$(6) \quad \int_\beta^\alpha f(z) dz = - \int_\alpha^\beta f(z) dz$$

onde as integrais são integrais de caminho sobre C em direções opostas. Das fórmulas (3) e (4) decorrem outras propriedades de integrais de caminhos, a saber,

$$(7) \quad \int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz$$

para qualquer constante complexa k ,

$$(8) \quad \int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz,$$

e, quando C consiste de um caminho C_1 de α a algum ponto γ e de um caminho C_2 de γ a β , então

$$(9) \quad \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

Quando z está sobre C , interpretamos o símbolo $|dz|$ assim:

$$|dz| = |\phi'(t) + i\psi'(t)| dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Nossa definição (4), Sec. 43, do comprimento do caminho C pode ser abreviada pela fórmula

$$(10) \quad L = \int_C |dz|$$

desde que se considere positivo o valor da integral real aqui.

Em vista da desigualdade (6), Sec. 42, temos a desigualdade

$$\left| \int_a^b f(\phi + i\psi)(\phi' + i\psi') dt \right| \leq \int_a^b |f| |\phi' + i\psi'| dt \quad (a \leq b).$$

Se usamos a abreviação

$$\int_C |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(\phi(t) + i\psi(t))| |\phi'(t) + i\psi'(t)| dt \quad (a \leq b),$$

a desigualdade anterior para a integral de caminho de uma função seccionalmente contínua toma a forma

$$(11) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

Se $|f(z)| \leq M$ quando z percorre o caminho C , onde M é alguma constante, e se L designa o comprimento de C , o valor da integral real no segundo membro da desigualdade (11) não exerce ML ; portanto

$$(12) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

As propriedades (11) e (12) são particularmente úteis na teoria das integrais de caminho.

O valor de uma integral de caminho é independente da mudança na representação paramétrica de seu arco descrita pela equação (5), Sec. 43. Isto pode ser visto escrevendo as integrais reais na fórmula (4) em termos do novo parâmetro r e seguindo o procedimento usado na Sec. 43, para mostrar a invariância do comprimento de arco.

Embora uma análise mais profunda de fundamentos geométricos e lógicos, ou mesmo topológicos, da teoria das integrais curvilíneas seja interessante, limitar-nos-emos a abordar a teoria em si.

A integral definida real pode ser interpretada como área. Ela tem outras interpretações. Exceto em casos especiais, não dispomos de uma interpretação útil, geométrica ou física, para a integral curvilínea no plano complexo. Apesar

disso, como já salientamos, a teoria da integração no plano complexo é notoriamente útil na física, engenharia e matemática.

45. Exemplos. Calculemos o valor da integral

$$I_1 = \int_{C_1} z^2 dz$$

onde C_1 é o segmento reto OB de $z = 0$ a $z = 2 + i$ (Fig. 30). Se a coordenada y é usada como parâmetro (t), as equações paramétricas de C_1 reduzem-se a $x = 2y$ ($0 \leq y \leq 1$).

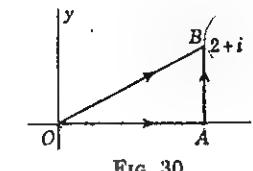


FIG. 30

O integrando z^2 é contínuo em todos os pontos; sobre C_1 ele fica

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 3y^2 + 4y^2i$$

e $[\phi'(t) + i\psi'(t)]dt$, ou $dx + idy$, se torna $(2 + i)dy$; logo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (3y^2 + 4y^2i)(2 + i) dy \\ &= (3 + 4i)(2 + i) \int_0^1 y^2 dy = \frac{3}{3} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

Seja C_2 o caminho OAB da Fig. 30 e calculemos a integral

$$I_2 = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz.$$

Sobre o arco OA , $z = x$. As equações paramétricas deste arco são $x = x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq 2$); logo dz é substituído por dx . Sobre AB , $z = 2 + iy$ ($0 \leq y \leq 1$), e dz é substituído por idy . Portanto,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2 + iy)^2 i dy \\ &= \frac{3}{3} + i \left[\int_0^1 (4 - y^2) dy + 4i \int_0^1 y dy \right] = \frac{3}{3} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

Incidentalmente, as equações do caminho OAB podem ser escritas na forma $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ ($0 \leq t \leq 3$), onde

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 2) \\ 2 & (2 \leq t \leq 3), \end{cases} \\ \psi(t) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 2) \\ t - 2 & (2 \leq t \leq 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Observemos que $I_2 = I_1$. Assim, a integral de z^2 sobre o caminho fechado $OABO$ tem o valor $I_2 - I_1 = 0$, e veremos logo que isto é uma consequência do fato de o integrando z^2 ser analítico sobre o caminho e no seu interior.

Como terceiro exemplo, consideremos a função

$$f(z) = \bar{z}$$

como integrando; f é contínua em todos os pontos. Se C_3 é o semicírculo superior do círculo $|z| = 1$ de $z = -1$ a $z = 1$ (Fig. 31), suas equações paramétricas podem ser escritas

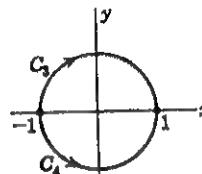


Fig. 31

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad \text{ou} \quad z = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Então, substituindo dz por $(-\sin \theta + i \cos \theta)d\theta$, vemos que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C_3} \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 (\cos \theta - i \sin \theta)(-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^0 d\theta = -\pi i. \end{aligned}$$

A integral I_4 entre os dois mesmos pontos ao longo do semicírculo inferior C_4 (Fig. 31), representado pelas equações

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad \text{ou} \quad z = e^{i\theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi),$$

é avaliada da mesma maneira:

$$I_4 = \int_{C_4} \bar{z} dz = i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \pi i.$$

Note que $I_4 \neq I_3$ e que a integral I_C de \bar{z} ao longo de todo o círculo C no sentido anti-horário, não se anula:

$$I_C = \int_C \bar{z} dz = I_4 - I_3 = 2\pi i.$$

Quando z está sobre o círculo unitário C ,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z};$$

assim, os integrandos das integrais I_3 , I_4 e I_C podem ser substituídos por $1/z$.

Em particular,

$$I_C = \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Como último exemplo, seja C_5 o segmento reto do ponto $z = i$ a $z = 1$. Sem calcular a integral

$$I_5 = \int_{C_5} \frac{dz}{z^4},$$

vamos determinar um majorante para seu valor absoluto. O integrando é contínuo sobre C_5 visto que seu único ponto de descontinuidade é a origem.

Escolhido o parâmetro t como a coordenada x , as equações paramétricas de C_5 reduzem-se a $y = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$). Quando z está sobre C_5 ,

$$|z^4| = (x^2 + y^2)^2 = [x^2 + (1 - x)^2]^2 = (2x^2 - 2x + 1)^2,$$

e, para determinar um minorante para esta quantidade, notemos que

$$|z^4| = [2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}]^2 \geq \frac{1}{4}$$

pois $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. Consequentemente, para todo z sobre C_5 ,

$$\left| \frac{1}{z^4} \right| \leq 4,$$

fato, aliás, geometricamente evidente. Assim, podemos tomar $M = 4$ na desigualdade (12), Sec. 44. Como o comprimento de C_5 é $\sqrt{2}$, segue-se que

$$|I_5| \leq 4\sqrt{2}.$$

EXERCÍCIOS

Para cada função f e caminho C dados nos exercícios 1 a 6, determine o valor de

$$\int_C f(z) dz$$

após verificar que f é pelo menos seccionalmente contínua sobre C , e que C é de fato um caminho tal como definido na Sec. 43.

1. $f(z) = y - x - 3x^2i$; C é o segmento reto de $z = 0$ a $z = 1 + i$.

Resp. $1 - i$.

2. $f(z) = y - x - 3x^2i$; C consiste de dois segmentos retos, um de $z = 0$ a $z = i$ e o outro de $z = i$ a $z = 1 + i$.

Resp. $\frac{1}{2}(1 - i)$.

3. $f(z) = (z+2)/z$ e C é

(a) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de 0 a π ;
 (b) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de 0 a $-\pi$;
 (c) o círculo $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia de $-\pi$ a π .

Resp. (a) $-4 + 2\pi i$; (b) $-4 - 2\pi i$; (c) $4\pi i$.

4. $f(z) = z - 1$, e C é o arco abaixo de $z = 0$ a $z = 2$:

(a) o semicírculo $z - 1 = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$);
 (b) o segmento do eixo- x .

Resp. (a) 0; (b) 0.

5. C é o arco de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$ da curva $y = x^3$ e

$$f(z) = \begin{cases} 4y & \text{quando } y > 0 \\ 1 & \text{quando } y \leq 0. \end{cases}$$

Resp. $2 + 3i$.

6. $f(z) = e^z$, e C é o caminho abaixo de $z = \pi i$ a $z = 1$:

(a) o segmento reto;
 (b) a poligonal ao longo dos eixos de coordenadas.

Resp. (a) $1 + e$; (b) $1 + e$.

7. Se C é o contorno do quadrado com vértices nos pontos $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$, mostre que

$$\int_C (3z + 1) dz = 0.$$

8. Sendo C a fronteira do quadrado no exercício 7, calcule

$$\int_C \pi \exp(\pi \bar{z}) dz.$$

Resp. $4(e^{\pi} - 1)$.

9. Avalie a integral I_3 , Sec. 45, usando as equações de C :

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

10. Seja C o arco do círculo $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante. Mostre que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

sem calcular o valor da integral.

11. Sendo C o contorno do triângulo com vértices nos pontos $z = 0$, $z = -4$ e $z = 3i$, mostre que

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$

12. Sendo C um círculo $|z| = R$, onde $R > 1$, mostre que

$$\left| \int_C \frac{\log z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \log R}{R}$$

e que, portanto, o valor da integral tende para zero quando $R \rightarrow \infty$.

13. Escrevendo a integral em termos de integrais reais, prove que

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = \beta - \alpha$$

quando a integração é efetuada do ponto $z = \alpha$ a $z = \beta$ sobre (a) um arco de Jordan suave; (b) um caminho.

14. Prove que

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} z dz = \beta^2 - \alpha^2$$

quando a integração é efetuada sobre (a) um arco suave de Jordan; (b) um caminho.

(c) Como consequência, mostre que a integral de z ao longo de qualquer caminho fechado é nula.

15. Quando C_0 é um círculo

$$z - z_0 = r_0 e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, r_0 > 0).$$

com orientação anti-horária, mostre que

$$\int_{C_0} f(z) dz = ir_0 \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

se f é contínua sobre C_0 .

16. Como casos particulares do exercício 15, mostre que

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int_{C_0} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

46. O Teorema de Cauchy-Goursat.¹ De acordo com o teorema de Green sobre integrais curvilíneas reais, se duas funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, juntamente com suas derivadas parciais de primeira ordem, são contínuas sobre uma região fechada R consistindo do interior de um caminho fechado C e da fronteira C , então

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde C é orientado no sentido positivo (anti-horário); os pontos interiores de R ficam à esquerda de quem caminha sobre C em tal sentido.

Considere agora uma função

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

a qual é analítica em todos os pontos de um caminho fechado C e de seu interior, e é tal que $f'(z)$ é contínua aí. Então u e v , e suas derivadas parciais de primeira ordem, são contínuas na região fechada, e consequentemente

¹ Edouard GOURSAT, matemático francês, 1858-1942

$$\int_C (u \, dx - v \, dy) = - \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

$$\int_C (v \, dx + u \, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Em vista das condições de Cauchy-Riemann, os integrandos das duas integrais duplas se anulam na região R . De acordo com a fórmula (5), Sec. 44, as integrais curvilíneas no primeiro membro são as partes real e imaginária do número complexo representando a integral curvilínea de $f(z)$. Assim,

$$\int_C f(z) \, dz = 0.$$

Este resultado foi obtido pela primeira vez por Cauchy no começo do último século.

Como exemplos elementares, notemos que, para todo caminho fechado C ,

$$\int_C dz = 0, \quad \int_C z \, dz = 0, \quad \int_C z^2 \, dz = 0,$$

visto que as funções 1 , z e z^2 são inteiras e suas derivadas são contínuas em todos os pontos.

Goursat foi o primeiro a provar que a continuidade de f' pode ser omitida das hipóteses no teorema. A remoção desta condição é importante. Uma das consequências, por exemplo, é que as derivadas das funções analíticas também são analíticas, como mostraremos adiante. A reformulação do teorema, *teorema de Cauchy-Goursat*, pode ser enunciada como segue.

Teorema. Se uma função f é analítica em todos os pontos interiores e sobre um caminho fechado C , então

$$\int_C f(z) \, dz = 0.$$

A demonstração será apresentada nas duas seções subsequentes. Será uma tarefa simples estender o resultado a curvas mais gerais, inclusive, por exemplo, a toda fronteira da região entre dois polígonos, um interior ao outro.

47. Um Teorema Preliminar. A derivada $f'(z_0)$ existe quando $f(z)$ é analítica no ponto z_0 ; isto é, dado um número positivo ϵ , existe um número positivo δ_0 , dependendo de z_0 e ϵ , tal que

$$(1) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_0.$$

Para a prova do teorema de Cauchy-Goursat, mostremos primeiro que é possível dividir a região delimitada pelo caminho fechado C , de modo que a

primeira desigualdade acima resulte verdadeira para todo z em cada subdivisão, quando z_0 é convenientemente escolhido nessa subdivisão. Assim, vemos que há certa uniformidade na aproximação de $f'(z)$ por $\Delta f/\Delta z$.

Lema. *Seja $f(z)$ analítica em todos os pontos de uma região fechada R , consistindo do interior de um caminho fechado C e do próprio C . Dado um número positivo ϵ , é possível dividir R num número finito n de quadrados e de quadrados parciais, cujas fronteiras serão indicadas por C_i , de modo que existe um ponto z_i no interior de C_i ou sobre C_i para o qual a desigualdade*

$$(2) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \epsilon \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

será satisfeita por todo ponto z ($z \neq z_i$) no interior de C_j ou sobre C_j .

Dividamos a região R por meio de retas paralelas aos eixos de coordenadas, de modo a cobrir a região por um número finito de quadrados iguais. A parte de cada quadrado que fica fora de R é removida; assim R fica dividida em quadrados e quadrados parciais (Fig. 32).

Seja dado um número positivo ϵ .

Para simplificar a linguagem, diremos que uma dessas sub-regiões, quadrado ou quadrado parcial, "tem a propriedade (2)" se existe um ponto z_j nessa sub-região, tal que a desigualdade (2) é satisfeita, para ϵ acima dado, por todo ponto z ($z \neq z_j$) da sub-região.

Se todas as sub-regiões têm a propriedade (2), não há o que provar.

Suponhamos agora que algumas das sub-regiões não tenham a propriedade (2). Vamos dividir cada uma das sub-regiões sem a propriedade (2) do seguinte modo: se a sub-região é um quadrado, dividimo-la em quatro quadrados iguais, e se a sub-região é um quadrado parcial, dividimos o quadrado que a contém em quatro quadrados iguais e, a seguir, descartamos as partes que ficam fora de R . Se algumas das regiões menores assim obtidas ainda não tiverem a propriedade (2), continuaremos dividindo cada uma dessas do mesmo modo, etc.

Após um número finito de tais operações (divisões), pode ocorrer que cheguemos a uma divisão de R , tal que todas as sub-regiões presentes tenham a propriedade (2). Nesse caso o lema está verificado.

Suponhamos então que, pelo menos, uma das sub-regiões originais não possa ser dividida, por um número finito de tais operações, em regiões do tipo mencionado, todas com a propriedade (2). Indicamos essa sub-região por σ_0 se ela é um quadrado; se a sub-região é um quadrado parcial, σ_0 designa o quadrado

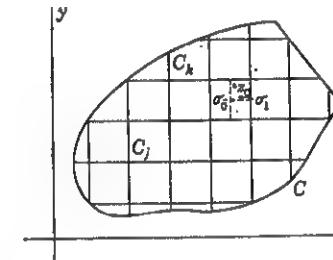


FIG. 3

que a contém. Então, após a divisão de σ_0 , um dos quatro quadrados menores, denotado por σ_1 , contém pontos de R mas não tem a propriedade (2). Dividindo σ_1 obteremos σ_2 , que contém pontos de R e não tem a propriedade (2), etc. Se, em qualquer estágio k , existirem mais de um quadrado nas condições acima, σ_k indicará aquele que ocupa a posição inferior e mais à esquerda, a fim de tornar a escolha específica.

Cada quadrado σ_k da seqüência infinita

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \dots$$

está contido no precedente, σ_{k-1} , e tem o lado que é a metade do de σ_{k-1} ; também σ_k contém pontos de R . Existe um ponto z_0 comum a todos os quadrados desta seqüência infinita encaixada de quadrados (Exercício 13, Sec. 50). Cada vizinhança de z_0 , $|z - z_0| < \delta$, contém um quadrado da seqüência, quadrado cuja diagonal tenha o comprimento menor do que δ . Assim, cada vizinhança de z_0 contém pontos de R e, portanto, z_0 é um ponto de acumulação do conjunto R . Como a região R é fechada, o ponto de acumulação z_0 pertence a R .

Deste modo, $f(z)$ é analítica em z_0 e, correspondendo a ϵ inicialmente dado, existe um número positivo δ_0 tal que a condição (1) é satisfeita em z_0 . Mas a vizinhança $|z - z_0| < \delta_0$ que comparece na condição (1), contém um quadrado σ_K , onde K é suficientemente grande, de modo que o comprimento da diagonal de σ_K seja menor do que δ_0 . Conseqüentemente, o ponto z_0 serve como ponto z_j na desigualdade (2) que, neste caso, é satisfeita na sub-região consistindo do quadrado σ_K ou de uma parte de σ_K . Em outras palavras, σ_K ou uma parte de σ_K já tem a propriedade (2). Desta feita, não é mais necessário dividir σ_K , o que contradiz nossas hipóteses. Assim chegamos a uma contradição e a demonstração do lema está completa.

48. Demonstração do Teorema de Cauchy-Goursat. Mostraremos que a desigualdade

$$(1) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| < \epsilon'$$

se verifica para qualquer número positivo ϵ' . Para o caminho fechado dado C e a função dada f , a integral tem um valor constante definido. A integral, portanto, deve ser igual a zero.

Para um número positivo dado ϵ , sejam C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) os contornos de quadrados e quadrados parciais em que a região é dividida, de acordo com o lema precedente, de modo que cada quadrado, ou quadrado parcial, tem a propriedade (2), Sec. 47. Podemos enunciar a desigualdade (2), Sec. 47, na seguinte forma. Cada uma das funções

$$(2) \quad \delta_j(z) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

satisfaz à desigualdade

$$(3) \quad |\delta_j(z)| < \epsilon.$$

Observe que cada função $\delta_j(z)$ é contínua; em particular, seu limite, quando z tende para z_j , é igual a zero, e podemos definir $\delta_j(z_j)$ como sendo igual a zero, preservando assim a continuidade da função.

Façamos agora com que z percorra a fronteira C_j . De acordo com a equação (2), o valor de $f(z)$ em qualquer ponto de C_j pode ser escrito

$$(4) \quad f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z).$$

Integrando ao longo de C_j e lembrando-nos de que (Sec. 46)

$$\int_{C_j} dz = 0, \quad \int_{C_j} z dz = 0,$$

vemos que

$$(5) \quad \int_{C_j} f(z) dz = \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z) dz.$$

Seja a integração ao longo de cada C_j feita no sentido anti-horário. A soma de todas essas integrais é a integral ao longo do caminho fechado C no sentido anti-horário, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz = \int_C f(z) dz,$$

visto que as integrais curvilíneas ao longo do segmento-fronteira comum a duas sub-regiões adjacentes se cancelam mutuamente; a integração é feita num sentido ao longo desse segmento numa região, e no sentido oposto na outra (Fig. 33).

Permanecem somente as integrais ao longo dos arcos, que são partes de C . Portanto, em vista da equação (5),

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z) dz,$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z) dz \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{C_j} |z - z_j| |\delta_j(z)| dz. \end{aligned}$$

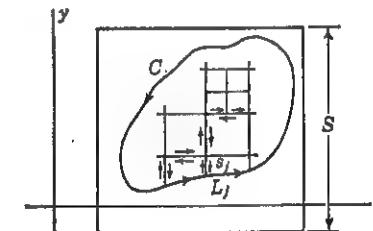


FIG. 33

Segue-se da desigualdade (3) que

$$(6) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| < \epsilon \sum_{j=1}^n \int_{C_j} |z - z_j| |dz|.$$

Cada fronteira C_j coincide, total ou parcialmente, com a fronteira de um quadrado. Em qualquer dos casos, seja s_j o comprimento de um lado desse quadrado. Ora, z está sobre C_j , e z_j no interior ou sobre C_j , de modo que

$$|z - z_j| \leq s_j \sqrt{2},$$

e

$$(7) \quad \int_{C_j} |z - z_j| |dz| \leq s_j \sqrt{2} \int_{C_j} |dz|.$$

A última integral representa o comprimento de C_j . Seu valor é $4s_j$ se C_j é um quadrado, e não excede $(4s_j + L_j)$ se C_j é um quadrado parcial, onde L_j é o comprimento do arco de C que faz parte de C_j . Quando C_j é um quadrado e A_j designa a área desse quadrado, então, de acordo com a desigualdade (7),

$$(8) \quad \int_{C_j} |z - z_j| |dz| \leq 4 \sqrt{2} s_j^2 = 4 \sqrt{2} A_j.$$

Quando C_j é um quadrado parcial,

$$(9) \quad \int_{C_j} |z - z_j| |dz| < s_j \sqrt{2} (4s_j + L_j) < 4 \sqrt{2} A_j + \sqrt{2} S L_j,$$

onde S é o comprimento de um lado de algum quadrado que envolva todo o caminho C e todos os quadrados usados originalmente para cobrir C (Fig. 33). Assim, a soma de todos os A_j não excede S^2 .

Se L designa o comprimento de C , segue-se agora das desigualdades (6), (8) e (9) que

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \epsilon (4 \sqrt{2} S^2 + \sqrt{2} S L).$$

Aqui, para cada número positivo ϵ' , o segundo membro pode ser tornado igual a ϵ' , atribuindo-se um valor conveniente ao número positivo ϵ . Está, assim, estabelecida a desigualdade (1), e o teorema de Cauchy-Goursat está demonstrado.

49. Domínios Simplesmente e Multiplamente Conexos. Um domínio *simplesmente conexo* D é uma região aberta e conexa (um domínio) tal que todo caminho fechado contido em D envolve somente pontos de D . O interior de um caminho fechado é um exemplo; mas o exterior não é simplesmente conexo, como também não o é a região anular entre dois círculos concêntricos. Um domínio que não é simplesmente conexo diz-se *multiplamente conexo*.

O teorema de Cauchy-Goursat pode ser enunciado na seguinte forma alternada.

Se $f(z)$ é analítica sobre um domínio simplesmente conexo D , então, para todo caminho fechado C contido em D , tem-se

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = 0.$$

O caminho fechado C aqui pode ser substituído por uma cadeia fechada de arcos suaves de Jordan, que eventualmente se auto-intercepta, uma vez que cada laço da cadeia é um caminho fechado contido em D . Também, C pode conter um arco que é duas vezes percorrido em sentidos opostos, já que as integrais ao longo do arco nos dois sentidos se cancelam mutuamente. Se o número de tais arcos, ou auto-intersecções, não é finito, podem surgir problemas delicados.

O teorema pode ser estendido de modo a permitir que D represente certos domínios multiplamente conexos.

Teorema. Seja C um caminho fechado e seja C_j um número finito ($j = 1, 2, \dots, n$) de caminhos fechados contidos no interior de C , tais que os interiores de C_j não tenham pontos em comum. Seja R a região fechada consistindo de todos os pontos de C e dos pontos interiores a C , exceto os pontos interiores a cada C_j (Fig. 34), e seja B a fronteira orientada de R , consistindo de C e de todos os C_j , orientados de modo a deixarem os pontos de R à esquerda de B . Então, se $f(z)$ é analítica em R ,

$$(2) \quad \int_B f(z) dz = 0.$$

Para estabelecermos este resultado, vamos introduzir um segmento reto L_1 , ou uma cadeia contínua de tais segmentos, ligando o caminho C ao caminho C_1 ; um outro, L_2 , ligando C_1 e C_2 ; e assim por diante; por último, L_{n+1} , ligando C_n e C . Desta maneira, tal como indicam as setas na Fig. 34, podem ser formados

dois caminhos fechados C' e C'' , cada um consistindo dos segmentos L_j e de partes de C e C_j . Como f é analítica nos interiores de C' e C'' e sobre os mesmos, o teorema de Cauchy-Goursat se aplica a f sobre C' e C'' , e a soma das integrais de f ao longo de C' e de C'' , onde os dois caminhos são orientados de modo a deixarem os seus pontos interiores à esquerda, é igual a zero. Mas esta soma é exatamente a integral de f ao longo de B , visto que as integrais de sentidos opostos ao longo de cada L_j se cancelam mutuamente, permanecendo na soma somente a integral ao longo de B . Segue assim a fórmula (2).

Como ilustração deste teorema, vemos que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)} = 0$$

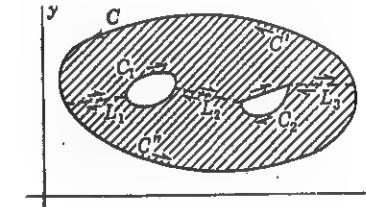


FIG. 34

se a fronteira B consiste do círculo $|z| = 2$ com orientação positiva e do círculo $|z| = 1$ com orientação negativa (Fig. 35). O integrando é analítico, exceto nos pontos $z = 0$ e $z = \pm 3i$, e esses três pontos ficam fora da região anular com fronteira B .

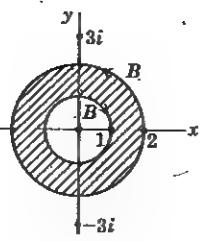


Fig. 35

50. Integrais Indefinidas. Sejam z_0 e z dois pontos num domínio simplesmente conexo D sobre o qual f é analítica (Fig. 36). Se C_1 e C_2 são dois caminhos, contidos em D , ligando z_0 a z , então C_1 e C_2 juntos, formam uma curva fechada, caminho fechado, a menos de possíveis auto-intersecções, ao longo do qual o teorema de Cauchy-Goursat é válido. Assim, se indicamos por z' , pontos de C_1 e C_2

$$\int_{C_1} f(z') dz' - \int_{C_2} f(z') dz' = 0;$$

isto é, a integral de z_0 a z ,

$$(1) \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz',$$

tem um mesmo valor para todos esses caminhos.

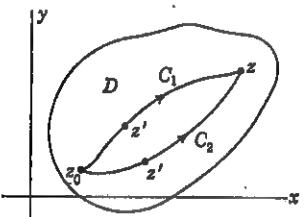


Fig. 36

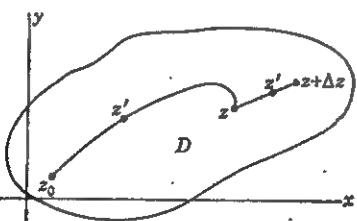


Fig. 37

Mostraremos agora que a derivada de $F(z)$ existe e é igual a $f(z)$. Seja $z + \Delta z$ um ponto em D (Fig. 37). Então

$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) - F(z) &= \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(z') dz' - \int_{z_0}^z f(z') dz' \\ &= \int_z^{z + \Delta z} f(z') dz', \end{aligned}$$

onde o caminho de integração de z a $z + \Delta z$ pode ser escolhido como um segmento reto. Podemos escrever (Exercício 13, Sec. 45)

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} dz' = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) dz',$$

e portanto,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(z') - f(z)] dz'.$$

Mas f é contínua no ponto z_0 . Logo, para cada número positivo ϵ , existe um número positivo δ tal que

$$|f(z') - f(z)| < \epsilon$$

quando $|z' - z| < \delta$, ou, em particular, quando $|\Delta z| < \delta$. Portanto, quando $|\Delta z| < \delta$,

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |dz'| = \epsilon;$$

isto é,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Assim, a derivada da integral (1) existe em cada ponto z em D , e

$$(2) \quad F'(z) = f(z).$$

A integral de uma função analítica é portanto uma função analítica, do seu limite superior de integração, desde que o caminho de integração seja confinado a um domínio simplesmente conexo em que o integrando é analítico.

Podemos ver, da definição (1), que $F(z)$ varia de uma constante aditiva quando o limite inferior de integração z_0 é substituído por uma outra constante. A função F é uma *integral indefinida* ou antiderivada de f , escrita

$$F(z) = \int f(z) dz;$$

isto é, ela é uma função analítica cuja derivada é $f(z)$. Em vista da fórmula (1), a integral definida pode ser avaliada como *diferença de valores da integral indefinida*, como no caso de integrais reais;

$$(3) \quad \int_a^b f(z) dz = \int_{z_0}^b f(z) dz - \int_{z_0}^a f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Aqui os caminhos de integração supõem-se contidos num domínio simplesmente conexo onde f é analítica.

Deve-se notar que se G é uma função analítica, diferente de F , tal que $G'(z) = f(z)$, então a derivada da função $w = G - F$ é zero. Assim, se $w = u + iv$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

e portanto $\partial u / \partial x$ e $\partial v / \partial x$ se anulam em todo o domínio onde F e G são analíticas. Em vista das condições de Cauchy-Riemann, $\partial u / \partial y$ e $\partial v / \partial y$ também se anulam, e portanto u e v são constantes. Logo w é uma constante, seguindo-se que as duas integrais indefinidas $F(z)$ e $G(z)$ diferem por uma constante. Como consequência, qualquer integral indefinida de f pode ser usada, no lugar de F , na fórmula (3).

Uma integral indefinida da função $f(z) = z^2$, por exemplo, é a função inteira $F(z) = z^3/3$. Como a função z^2 também é inteira, podemos escrever

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3$$

para qualquer caminho entre os pontos $z = 0$ e $z = 1+i$.

Como outro exemplo, vamos calcular

$$(4) \quad \int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$$

ao longo de um caminho qualquer, ligando os dois limites, contido no semiplano superior do plano- z , onde

$$(5) \quad z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

Esta função não é analítica nos pontos do raio $\theta = 0$ em $z = 1$ em particular. Mas um outro ramo

$$f_1(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right).$$

da função multivalente $z^{\frac{1}{2}}$ é analítico em todos os pontos, exceto no raio $\theta = -\pi/2$. Os valores de $f_1(z)$ no semiplano superior coincidem com os da nossa função (5), de modo que o nosso integrando pode ser substituído por $f_1(z)$. Uma integral indefinida de f_1 é a função

$$\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \exp \frac{3i\theta}{2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right),$$

analítica no domínio de definição de f_1 ; assim,

$$\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\theta}{2}} \Big|_{z=-1}^{z=1} = \frac{2}{3} (e^0 - e^{3i\pi/2}) = \frac{2}{3} (1+i).$$

A integral (4) ao longo de um caminho abaixo do eixo- x tem outro valor. Aí podemos substituir o integrando pelo ramo

$$f_2(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \right),$$

cujos valores coincidem com os da função (5) no semiplano inferior. A função analítica

$$\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \exp \frac{3i\theta}{2} \quad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \right)$$

é uma integral indefinida de $f_2(z)$; assim, ao longo de qualquer caminho contido no semiplano inferior,

$$\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\theta}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} (e^{3i\pi i} - e^{3i\pi/2}) = \frac{2}{3} (-1+i).$$

A integral da função (5), no sentido positivo, ao longo de um caminho fechado, consistindo de um caminho do primeiro grupo e de um do segundo tem, portanto, o valor

$$\frac{2}{3} (-1+i) - \frac{2}{3} (1+i) = -\frac{4}{3}.$$

EXERCÍCIOS

1. Determine o domínio de analiticidade da função f e aplique o teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

onde o caminho fechado C é o círculo $|z| = 1$ e quando

$$(a) f(z) = \frac{z^2}{z-3}; \quad (b) f(z) = z e^{\frac{1}{z}}; \quad (c) f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2};$$

$$(d) f(z) = \operatorname{sech} z; \quad (e) f(z) = \operatorname{tg} z; \quad (f) f(z) = \operatorname{Log}(z+2).$$

2. Se B é a fronteira da região entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado com lados sobre as retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, onde B é orientada de modo a deixar a região à sua esquerda, diga porque

$$\int_B f(z) dz = 0$$

quando

$$(a) f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}; \quad (b) f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)}; \quad (c) f(z) = \frac{z}{1-e^z}.$$

3. Seja C_1 um caminho fechado no domínio interior a um outro caminho fechado C_2 , onde C_1 e C_2 são ambos orientados no sentido positivo (anti-horário). Se uma função f é analítica na região fechada entre C_1 e C_2 , diga porque

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

4. Usando os resultados do exercício 3 acima e do exercício 16, Sec. 45, mostre que

$$\int_C \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{(z-2-i)^n} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

onde C é a fronteira do retângulo $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$, orientada no sentido positivo.

5. Usando uma integral indefinida, mostre que, para qualquer caminho C que se estende de um ponto α a um ponto β ,

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}). \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

6. Avalie cada uma das seguintes integrais, ao longo de um caminho arbitrário ligando os limites de integração:

$$(a) \int_1^{i/2} e^{\pi z} dz; \quad (b) \int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz; \quad (c) \int_1^3 (z-2)^3 dz.$$

Resp. (a) $(1+i)\pi$; (b) $e+1/e$; (c) 0.

7. Quando $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$ e $z_1 \neq z_2$, mostre porque

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$$

sempre que o caminho de integração é interior a um domínio simplesmente conexo que não contém a origem. Justifique também a seguinte afirmação: para qualquer caminho fechado C , do qual a origem é um ponto interior ou um ponto exterior,

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

8. Sejam z_0, z_1 e z_2 três pontos distintos de um domínio simplesmente conexo D . Suponha que uma função f e sua derivada f' sejam ambas analíticas sobre D , exceto em z_0 . Generalize o resultado no exercício 7 para mostrar que, para todo caminho em D que vai de z_1 a z_2 sem passar por z_0 ,

$$\int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1); \quad \text{e, portanto,} \quad \int_C f'(z) dz = 0$$

quando o caminho fechado C em D não passa por z_0 . Dê exemplos de tais funções e domínios.

9. Usando uma integral indefinida, determine o valor da integral

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$$

ao longo de um caminho qualquer que vai de $z = -2i$ a $z = 2i$, contido no semiplano direito. Note que o ramo principal $\text{Log } z$ é uma integral indefinida de $1/z$, que é analítico no semiplano $x \geq 0$ exceto na origem.

10. Resolva o exercício 9 para um caminho qualquer que não encontre o semi-eixo $x \geq 0$ do eixo real.

Resp. $-\pi i$

11. Note que a função univalente

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}),$$

$$f(0) = 0$$

é contínua em todo o semiplano $0 \leq \theta \leq \pi, r \geq 0$. Seja C a fronteira do semi-disco $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$, orientada no sentido positivo. Mostre que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

computando as integrais de f ao longo do semicírculo e ao longo dos dois raios sobre o eixo-x. Por que não se aplica o teorema de Cauchy-Goursat aqui?

12. *Intervalos Encaixados.* Determina-se uma seqüência de intervalos fechados $a_n \leq x \leq b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) de acordo com certa regra de escolha de semi-intervalos, de modo que o intervalo (a_1, b_1) seja o semi-intervalo esquerdo ou o direito de um dado intervalo (a_0, b_0) ; então (a_2, b_2) é um dos semi-intervalos de (a_1, b_1) , e assim por diante! Prove que existe um ponto x_0 que pertence a cada um dos intervalos fechados (a_n, b_n) .

Sugestão: Note que as extremidades esquerdas a_n formam uma seqüência limitada não decrescente de números, visto que $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_0$; portanto a seqüência tem um limite A quando $n \rightarrow \infty$. Mostre, de modo análogo, que a seqüência das extremidades direitas b_n tem um limite B ; e, então, que $B = A = x_0$.

13. *Quadrados Encaixados.* Um quadrado $\sigma_0: a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq y \leq d_0$, onde $b_0 - a_0 = d_0 - c_0$, é dividido em quatro quadrados iguais por meio de retas paralelas aos eixos de coordenadas. Um desses quatro quadrados menores $\sigma_1: a_1 \leq x \leq b_1, c_1 \leq y \leq d_1$, onde $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$, é escolhido de acordo com alguma regra, e o mesmo é dividido em quatro quadrados iguais, dos quais um, σ_2 , é selecionado, etc. (Sec. 47). Prove que existe um ponto (x_0, y_0) que pertence a cada uma das regiões fechadas da seqüência infinita $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$.

Sugestão: Aplique os resultados do exercício 12 a cada uma das seqüências $a_n \leq x \leq b_n$ e $c_n \leq y \leq d_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

51. **A Fórmula Integral de Cauchy.** Estabeleceremos agora outro resultado fundamental.

Teorema. *Seja f analítica no interior de e sobre um caminho fechado C . Se z_0 é um ponto qualquer no interior de C , então*

$$(1) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

onde a integração é efetuada no sentido positivo ao longo de C .

A fórmula (1) é a fórmula integral de Cauchy. Ela mostra que o valor de uma função analítica numa região é determinado, em toda a região, por seus valores sobre a fronteira. Assim, não há escolha quanto à maneira de definição da função nos pontos interiores, quando a função está definida sobre a fronteira. Toda alteração de valores da função nos pontos interiores deve ser acompanhada por uma mudança de seus valores na fronteira, se se deseja preservar a analiticidade da função. Veremos outras evidências deste caráter *orgânico* de funções analíticas no decorrer da teoria.

De acordo com a fórmula integral de Cauchy, por exemplo, se C é o círculo $|z| = 2$ orientado no sentido positivo, então, tomando $z_0 = -i$, podemos escrever

$$\int_C \frac{z \, dz}{(9 - z^2)(z + i)} = 2\pi i \frac{-i}{9 - i^2} = \frac{\pi}{5},$$

uma vez que a função $f(z) = z/(9 - z^2)$ é analítica no interior de C e sobre C .

Para demonstrar o teorema, seja C_0 um círculo em torno de z_0 , $|z - z_0| = r_0$, onde r_0 é suficientemente pequeno para que C_0 esteja contido no interior de C (Fig. 38). A função $f(z)/(z - z_0)$ é analítica em todos os pontos interiores e sobre C , exceto no ponto z_0 . Logo, sua integral ao longo da fronteira da região anular entre C e C_0 é zero, em virtude do teorema de Cauchy-Goursat, isto é,

$$\int_C \frac{f(z) \, dz}{z - z_0} - \int_{C_0} \frac{f(z) \, dz}{z - z_0} = 0,$$

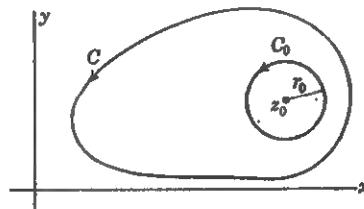


FIG. 38

onde ambas as integrais são calculadas no sentido anti-horário.

Como as integrais ao longo de C e de C_0 são iguais, podemos escrever

$$(2) \quad \int_C \frac{f(z) \, dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz.$$

Mas $z - z_0 = r_0 e^{i\theta}$ sobre C_0 e $dz = ir_0 e^{i\theta} d\theta$, de modo que

$$(3) \quad \int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

para todo número positivo r_0 . Como f é contínua no ponto z_0 , dado qualquer número positivo ϵ , existe um número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| \leq \delta.$$

Tomamos r_0 como sendo igual ao número δ . Então $|z - z_0| = \delta$, e

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz \right| \leq \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \frac{\epsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\epsilon.$$

O valor absoluto da última integral na equação (2) pode ser tornado arbitrariamente pequeno, tomando-se r_0 suficientemente pequeno. Mas as duas outras integrais na equação são independentes de r_0 em virtude da fórmula (3), e assim, a última também deve ser independente de r_0 . Logo seu valor deve ser igual a zero. A equação (2), então, reduz-se à fórmula abaixo, e o teorema está demonstrado.

$$\int_C \frac{f(z) \, dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

52. Derivadas de Funções Analíticas. Uma fórmula para a derivada $f'(z_0)$ pode ser escrita formalmente, derivando-se a integral na fórmula integral de Cauchy

$$(1) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \, dz}{z - z_0}$$

em relação a z_0 , sob o sinal de integral. Assim,

$$(2) \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \, dz}{(z - z_0)^2}.$$

Como antes, suponhamos que f seja analítica no interior de C e sobre o caminho fechado C e que z_0 esteja no interior de C . Para estabelecermos a fórmula (2), observemos primeiro que, de acordo com (1),

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z_0} \int_C \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right) f(z) \, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \, dz}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)}. \end{aligned}$$

A última integral tende para a integral

$$\int_C \frac{f(z) \, dz}{(z - z_0)^2}$$

quando Δz_0 tende para zero; com efeito, a diferença entre essas integrais reduz-se a

$$\Delta z_0 \int_C \frac{f(z) \, dz}{(z - z_0)^2(z - z_0 - \Delta z_0)}.$$

Seja M o valor máximo de $|f(z)|$ sobre C e seja L o comprimento de C . Então, se d_0 é a distância mínima de z_0 a C e se $|\Delta z_0| < d_0$, podemos escrever

$$\left| \Delta z_0 \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2(z - z_0 - \Delta z_0)} \right| < \frac{ML|\Delta z_0|}{d_0^2(d_0 - |\Delta z_0|)},$$

e a última fração tende para zero com Δz_0 . Conseqüentemente,

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2},$$

e a fórmula (2) está estabelecida.

Se derivarmos de novo ambos os membros da fórmula (2) em relação a z_0 , admitindo que a ordem de derivação e integração em relação a z possa ser invertida, obteremos

$$(3) \quad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3}.$$

Esta fórmula pode ser justificada pelo mesmo método usado para estabelecer a fórmula (2). Com efeito, segue-se da fórmula (2) que

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{f'(z_0 + \Delta z_0) - f'(z_0)}{\Delta z_0} &= \int_C \left[\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z_0)^2} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right] \frac{f(z) dz}{\Delta z_0} \\ &= \int_C \frac{2(z - z_0) - \Delta z_0}{(z - z_0 - \Delta z_0)^2(z - z_0)^2} f(z) dz. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo processo que o usado acima podemos mostrar que o limite da última integral, quando Δz_0 tende para zero, é

$$2 \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3}$$

é a fórmula (3) decorre imediatamente.

Acabamos de estabelecer a existência da derivada da função f' em cada ponto z_0 interior à região delimitada pelo caminho C .

De acordo com a definição, uma função f é analítica num ponto z_1 se, e somente se existe uma vizinhança de z_1 em cada ponto da qual $f'(z)$ existe. Logo f é analítica em alguma vizinhança do ponto. Se o caminho C , acima usado, é um círculo $|z - z_1| = r_1$ nessa vizinhança, então $f'(z)$ existe em cada ponto interior ao círculo, e portanto f' é analítica em z_1 . Podemos aplicar o mesmo argumento à função f' para concluirmos que sua derivada f'' também é analítica em z_1 , etc. Assim, o seguinte resultado fundamental é uma consequência da fórmula (3).

Teorema. Se uma função f é analítica num ponto, então suas derivadas de todas as ordens, f', f'', \dots , também são funções analíticas nesse ponto.

Como f' é analítica e, portanto, contínua, e como

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

segue-se que as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de primeira ordem também são contínuas. Como $f''(z)$ é analítica e etc., segue-se que as derivadas parciais de u e v de todas as ordens são funções contínuas de x e y em cada ponto onde f é analítica. Este resultado foi antecipado em Sec. 20, para as derivadas parciais de segunda ordem, na discussão de funções harmônicas.

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

O argumento usado para estabelecer as fórmulas (2) e (3) pode ser aplicado sucessivamente para se obter uma fórmula para a derivada de qualquer ordem. Mas podemos aplicar a indução matemática neste caso para obter a fórmula geral

$$(4) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Isto é, se supomos válida a fórmula para um número inteiro positivo $n = k$, podemos mostrar, como antes, que a mesma também é verdadeira para $n = k + 1$. A demonstração é deixada para o leitor, com a sugestão de considerar como um único termo a diferença $z - z_0$ nas simplificações algébricas.

O caminho fechado C aqui, bem como na fórmula integral de Cauchy, pode ser substituído pela fronteira orientada B de uma região fechada multiplamente conexa R do tipo descrito no teorema da Sec. 49, quando f é analítica em R e z_0 é um ponto interior de R . Argumentos usados para deduzir a fórmula integral de Cauchy e sua generalização (4) permanecem válidos quando C é substituído por B .

53. Teorema de Morera. Na Sec. 50 mostramos que a derivada da função

$$F(z) = \int_z^z f(z') dz'$$

existe em cada ponto de um domínio simplesmente conexo D e que, de fato,

$$F'(z) = f(z).$$

Supusemos af que f fosse analítica em D . Mas na nossa demonstração usamos apenas duas propriedades da função analítica f , a saber, que ela é contínua em D e que sua integral ao longo de qualquer caminho fechado em D se anula. Assim, quando f satisfaz a estas duas condições, a função F é analítica em D .

Mostramos em Sec. 52 que a derivada de toda função analítica é analítica. Como $F'(z) = f(z)$, segue-se que f é analítica. Estabelecemos, assim, o seguinte teorema, devido a E. Morera (1856-1909).

Teorema. *Se uma função f é analítica em todo um domínio simplesmente conexo D e se, para qualquer caminho fechado C em D ,*

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

então f é analítica em D .

O teorema de Morera serve como recíproca do teorema de Cauchy-Goursat.

54. Módulos Máximos de Funções. Seja f analítica num ponto z_0 . Se C_0 é um círculo $|z - z_0| = r_0$ em cujo interior e fronteira f é analítica, então, de acordo com a fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Segue-se que

$$(1) \quad |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r_0} \int_{C_0} |f(z)| |dz| = A_0,$$

onde A_0 é o valor médio de $|f(z)|$ sobre C_0 , isto é,

$$(2) \quad A_0 = \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| r_0 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| d\theta.$$

Assim, o valor de $|f|$ no centro não excede o valor médio sobre C_0 .

Seja M_0 o valor máximo da função real contínua $|f|$ no disco fechado $|z - z_0| \leq r_0$. Portanto, $|f(z_0)| \leq M_0$. Também $|f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| \leq M_0$ e, em vista da fórmula (2),

$$(3) \quad A_0 \leq M_0.$$

Suponhamos que $|f(z_0)| = M_0$. Então segue-se da desigualdade (1) que $M_0 \leq A_0$. Mas de (3), $M_0 \geq A_0$, e portanto $A_0 = M_0$. Assim, o valor médio de $|f|$, dado pela fórmula (2), coincide com o valor máximo M_0 de $|f|$. Ora, se $|f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| < M_0$ para algum θ , então essa função contínua de θ teria valores menores do que M_0 sobre algum intervalo, e, portanto, seu valor médio seria menor do que M_0 . Logo $|f(z)| = M_0$ em todos os pontos de C_0 .

Supondo ainda que $|f(z_0)| = M_0$, seja A_1 o valor médio de $|f|$ sobre um círculo qualquer C_1 , com centro em z_0 , contido no interior de C_0 . Então $|f(z)| \leq M_0$ sobre C_1 , donde decorre, como antes, que $M_0 \leq A_1$ e $A_1 \leq M_0$; assim

$A_1 = M_0$ e, portanto, $|f(z)| = M_0$ sobre C_1 . Conseqüentemente, $|f(z)| = M_0$ em todos os pontos do disco $|z - z_0| \leq r_0$. Mas se o módulo de uma função analítica é constante, é porque ela própria é constante (Exercício 15, Sec. 20). Logo $f(z)$ é uma constante se $|f(z_0)| = M_0$; isto é,

$$(4) \quad |f(z_0)| < M_0, \quad \text{a menos que } f \text{ seja constante.}$$

Este princípio do módulo máximo também pode ser enunciado como segue.

Se uma função não constante f é analítica em z_0 , então toda vizinhança de z_0 , $|z - z_0| < r_0$, contém pontos z tais que

$$(5) \quad |f(z)| > |f(z_0)|.$$

O teorema seguinte é uma consequência direta deste princípio.

Teorema do Módulo Máximo. *Se f é analítica num domínio limitado D e contínua no fecho \bar{D} , e se M designa o valor máximo de $|f(z)|$ em \bar{D} , então, a menos que f seja constante,*

$$(6) \quad |f(z)| < M \quad \text{para todo ponto } z \text{ em } D.$$

Assim, $|f(z)|$ assume seu valor máximo M em algum ponto da fronteira de D , e jamais num ponto interior. Observe que as hipóteses são satisfeitas quando f é analítica em \bar{D} . Note também que $|f|$ é contínua em \bar{D} e, portanto, assume um valor máximo M em \bar{D} , mas nunca em D , em vista da condição (5).

Se $f = u + iv$, então, como consequência do teorema do módulo máximo, a função harmônica $u(x, y)$ em \bar{D} , contínua em \bar{D} , assume seu valor máximo na fronteira B de D , mas nunca no interior de D , a menos que u seja constante. Com feito, a função $\exp f$ é analítica em D e contínua em \bar{D} , e portanto seu módulo e^u assume seu valor máximo somente em B ; logo $u(x, y)$ atinge ela própria seu máximo só em B .

Recomenda-se ao leitor, como exercício, o exame de propriedades correspondentes de valores mínimos de $|f|$ e u .

Quando f é analítica no interior de D e sobre o círculo C_0 , $|z - z_0| = r_0$, então

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = -1, 2, \dots),$$

de acordo com a fórmula integral para derivadas. Se M' é o máximo de $|f(z)|$ sobre C_0 , segue a desigualdade de Cauchy, a saber,

$$(7) \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M'}{r_0^n}$$

Seja M tal que $|f(z)| < M$ no interior de D e sobre C_0 e seja $n = 1$. Então

$\max_{z \in C_0} |f(z)| =$

$\max_{z \in C_0} |f(z)| =$

$\max_{z \in C_0} |f(z)| =$

$$(8) \quad |f'(z_0)| < \frac{M}{r_0},$$

o que nos diz que nenhuma função inteira, exceto uma constante, é limitada para todo z . Esta conclusão pode ser enunciada como segue.

Teorema de Liouville. *Se f é inteira e se $|f(z)|$ é limitado para todos os valores de z no plano complexo, então f é uma constante.*

Nas hipóteses acima, existe uma constante M tal que $|f(z)| < M$ para todos os z . Portanto, em cada ponto z_0 , a desigualdade (8) é verdadeira para qualquer número positivo r_0 . Podemos tomar r_0 arbitrariamente grande. Como $f'(z_0)$ é um número fixo, segue-se que $f'(z_0) = 0$, para todo z_0 , e portanto f é uma constante.

55. O Teorema Fundamental da Álgebra. Este teorema afirma que, se $P(z)$ é um polinômio em z de grau maior do que um,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m \quad (m = 1, 2, \dots; a_m \neq 0),$$

então a equação $P(z) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

A demonstração do teorema por métodos puramente algébricos não é fácil, mas a mesma decorre facilmente do teorema de Liouville. Com efeito, suponhamos que $P(z)$ não se anulasse para qualquer valor de z . Então a função

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

seria analítica em todos os pontos do plano complexo. Também $|f(z)|$ tende para zero quando $|z|$ tende para o infinito, de modo que $|f(z)|$ na hipótese acima, seria limitada para todos os z . Conseqüentemente $f'(z)$ seria uma constante. Mas isto é uma contradição, visto que $P(z)$ não pode ser constante quando $m = 1, 2, \dots$, e $a_m \neq 0$. Logo $P(z)$ é zero pelo menos para um valor de z .

Nos cursos de álgebra elementar, o teorema fundamental é geralmente enunciado sem demonstração; assim, como consequência, mostra-se que uma equação algébrica de grau m não pode ter mais que m raízes.

EXERCÍCIOS

1. Se C é o círculo $|z| = 3$ descrito no sentido positivo e se

$$g(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz \quad (|z_0| \neq 3),$$

mostre que $g(2) = 8\pi i$. Qual é o valor de $g(z_0)$ quando $|z_0| > 3$?

2. Se C é um caminho fechado orientado no sentido positivo e se

$$g(z_0) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3} dz,$$

mostre que $g(z_0) = 6\pi i z_0$ quando z_0 está no interior de C , e $g(z_0) = 0$ quando z_0 está no exterior de C .

3. Seja C a fronteira do quadrado, cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientada no sentido positivo. Dê o valor de cada uma das seguintes integrais:

$$(a) \int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz; \quad (b) \int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz; \quad (c) \int_C \frac{z}{2z + 1} dz;$$

$$(d) \int_C \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z - x_0)^2} dz \quad (|x_0| < 2); \quad (e) \int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz.$$

Resp. (a) $2\pi i$; (b) $\pi i/4$; (c) $-\pi i/2$; (d) $i\pi \sec^2(x_0/2)$; (e) 0.

4. Dê o valor da integral de $g(z)$ ao longo do caminho fechado $|z - i| = 2$ no sentido positivo quando

$$(a) g(z) = \frac{1}{z^2 + 4}; \quad (b) g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}.$$

Resp. (a) $\pi/2$; (b) $\pi/16$.

5. Sendo f analítico no interior de C e sobre um caminho fechado orientado C , mostre porque

$$\int_C \frac{f'(z) dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2},$$

onde z_0 é um ponto não pertencente a C .

6. Seja f uma função que é contínua sobre um caminho fechado C . Procedendo como na Sec. 52, mostre que a função

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - s}$$

é analítica em todos os pontos s inteiros a C e que, de fato, para cada tal s ,

$$g'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - s)^2}.$$

7. Sendo C o círculo unitário $z = \exp(i\theta)$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$, e k uma constante real qualquer, mostre primeiro que

$$\int_C \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i;$$

e, a seguir, escreva a integral em termos de θ para deduzir a fórmula

$$\int_0^\pi e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = \pi.$$

8. Seja f analítica num domínio limitado \bar{D} e contínua no fecho \bar{D} . Suponha $f(z) \neq 0$ para todo z em \bar{D} . Sendo N o valor mínimo de $|f(z)|$ em D , considere a função $1/f$ para mostrar que

$|f(z)| > N$ para todo ponto z em D ,

a menos que f seja uma constante. Este é o *teorema do módulo mínimo*.

9. Dê um exemplo para mostrar que $|f(z)|$ pode assumir seu valor mínimo num ponto interior de um domínio em que f é analítica, se esse valor mínimo é zero.

10. Ilustre o teorema do módulo máximo e o exercício 8 quando $f(z) = (z+1)^2$ e D é o interior do triângulo com vértices em $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$, exibindo os pontos em \bar{D} onde $|f(z)|$ tem seus valores máximo e mínimo.

Resp. $z = 2$, $z = 0$.

11. Seja f analítica num domínio limitado D e contínua em \bar{D} , e escreva $f = u + iv$. Mostre que a função harmônica $u(x, y)$ assume seu valor *mínimo* na fronteira de D e nunca num ponto interior, a menos que u seja constante.

12. Ilustre o exercício 11 e o princípio do máximo para funções harmônicas (Sec. 54) escrevendo $u = e^x \cos y$ e tomando D como interior do retângulo $0 < x < 1$, $0 < y < \pi$, e exibindo os pontos em \bar{D} nos quais $u(x, y)$ assume seus valores máximo e mínimo.

Resp. $z = 1 + it$, $z = 1$.

13. Sejam f uma função inteira e u sua parte real. Mostre que a função harmônica $u(x, y)$ é necessariamente uma constante, se a mesma admite um majorante u_0 , isto é, se $u(x, y) < u_0$ para todos os pontos no plano- xy .

14. Complete a dedução da fórmula (3), Sec. 52.

15. Aplique a indução para estabelecer a fórmula (4), Sec. 52.

CAPÍTULO 6

Séries de Potências

56. Séries de Taylor. Iniciamos nosso estudo com um dos resultados mais importantes deste capítulo.

Teorema. Seja $f(z)$ analítica em todos os pontos interiores de um círculo C_0 com centro em z_0 e raio r_0 . Então, em cada ponto interior z de C_0 , tem-se

$$(1) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots;$$

isto é, a série infinita acima converge para $f(z)$.

Este é o desenvolvimento da função f em série de Taylor em torno do ponto z_0 . Como caso particular, quando z , z_0 e $f(z)$ são reais, o mesmo representa o desenvolvimento de uma função real em série de Taylor, introduzido no cálculo elementar.

Para a demonstração do teorema, seja z um ponto qualquer, interior ao círculo C_0 , e seja $|z - z_0| = r$; assim, $r < r_0$. Seja z' um ponto sobre um círculo $|z' - z_0| = r_1$, indicado por C_1 , onde $r < r_1 < r_0$. Então, como ilustrado na figura 39, z é interior a C_1 , e f resulta analítica no interior, e sobre C_1 . De acordo com a fórmula integral de Cauchy, segue-se, então, que

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z}.$$

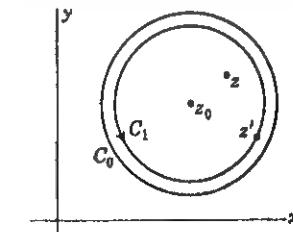


FIG. 39

Ora,

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}}.$$

Mas, quando α é um número complexo distinto da unidade, temos

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1 - \alpha},$$

identidade que fica evidente quando os dois membros são multiplicados por $(1 - \alpha)$.
Logo a fórmula acima pode ser escrita

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{z' - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^{n-1} + \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n \right],$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(z')}{z' - z} &= \frac{f(z')}{z' - z_0} + (z - z_0) \frac{f(z')}{(z' - z_0)^2} + \dots \\ &\quad + (z - z_0)^{n-1} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^n} + (z - z_0)^n \frac{f(z')}{(z' - z)(z' - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Dividamos agora ambos os membros da fórmula por $2\pi i$ e integremos cada termo ao longo de C_1 no sentido anti-horário. Em vista da fórmula (2) e das fórmulas integrais (Sec. 52),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{j+1}} = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_0) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

podemos escrever o resultado como segue:

$$(3) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n,$$

onde

$$(4) \quad R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)(z' - z_0)^n}.$$

Como $|z - z_0| = r_0$, $|z' - z_0| = r_1$ e $|z' - z| \geq r_1 - r$, segue-se da fórmula (4) que

$$|R_n| \leq \frac{r^n}{2\pi} \frac{2\pi r_1 M}{(r_1 - r)r_1^n} = \frac{r_1 M}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n,$$

onde M designa o valor máximo de $|f(z')|$ sobre C_1 . Mas $r/r_1 < 1$, e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Assim, quando n tende para o infinito, o limite da soma dos n primeiros termos do segundo membro da fórmula (3) é $f(z)$. Isto é, $f(z)$ é representada por uma série de Taylor,

$$(5) \quad f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Quando $z_0 = 0$, esta série reduz-se à *série de Maclaurin*,

$$(6) \quad f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

57. Observações e Exemplos. Quando f é analítica em todos os pontos inteiros ao círculo C_0 , a convergência da série de Taylor para $f(z)$ está assegurada, tornando-se desnecessário qualquer teste de convergência. O raio máximo de C_0 é a distância do ponto z_0 ao ponto singular de f mais próximo de z_0 , uma vez que a função deve ser analítica em todos os pontos inteiros a C_0 .

Como primeiro exemplo de desenvolvimento em série de Maclaurin, seja $f(z) = e^z$. Então $f^{(n)}(z) = e^z$ e $f^{(n)}(0) = 1$. Como e^z é analítica para todo valor de z , tem-se

$$(1) \quad e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{quando } |z| < \infty.$$

Da mesma maneira, obtém-se

$$(2) \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{quando } |z| < \infty,$$

$$(3) \quad \cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{quando } |z| < \infty,$$

$$(4) \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{quando } |z| < \infty,$$

$$(5) \quad \operatorname{ch} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{quando } |z| < \infty,$$

e

$$(6) \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{quando } |z| < 1.$$

Como caso particular do desenvolvimento (1), por exemplo, quando z é real, a representação

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é válida para todo real x .

Substituindo z por Z^2 no desenvolvimento (6), temos

$$\frac{1}{1+Z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z^{2n} \quad \text{quando } |Z| < 1,$$

visto que $|Z^2| < 1$ quando $|Z| < 1$. Quando se faz a substituição $z = -\alpha$, o desenvolvimento (6) nos fornece a soma da série geométrica infinita com razão α , isto é,

$$(7) \quad 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{quando } |\alpha| < 1.$$

As derivadas da função $f(z) = z^{-1}$ são

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-n-1} \quad (n = 1, 2, \dots; z \neq 0),$$

e, portanto, $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$. Logo, o desenvolvimento desta função em série de Taylor em torno do ponto $z = -1$ é

$$(8) \quad \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Este desenvolvimento é válido quando $|z-1| < 1$, visto que a função é analítica em todos os pontos, exceto em $z = 0$.

Como outro exemplo, vamos desenvolver a função

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2} \left(2 - \frac{1}{1+z} \right)$$

numa série de potências positivas e negativas de z . Não podemos aplicar série de Maclaurin a f , pois esta função não é analítica em $z = 0$; mas a mesma pode ser aplicada à função $1/(1+z)$. Assim, quando $0 < |z| < 1$, é verdade que

$$\begin{aligned} \frac{1+2z}{z^2+z^3} &= \frac{1}{z^2} (2 - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que, para todo valor finito de z ,

$$e^z = e + e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

2. Mostre que

$$(a) \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad \text{quando } |z+1| < 1;$$

$$(b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2} \right)^n \quad \text{quando } |z-2| < 2.$$

3. Desenvolva $\cos z$ em série de Taylor em torno do ponto $z = \pi/2$.

4. Desenvolva $\operatorname{sh} z$ em série de Taylor em torno do ponto $z = \pi i$.

5. Qual é o maior círculo no interior do qual a série de Maclaurin para a função $\operatorname{tgh} z$ converge para a função? Escreva os primeiros termos desta série.

6. Prove que, quando $0 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

7. Faça a substituição $z+1 = Z$ no desenvolvimento em série de Maclaurin (6), para obter representação da função Z^{-1} em potências de $(Z-1)$, que seja válida quando $|Z-1| < 1$. Mostre que seu resultado está de acordo com o desenvolvimento em série de Taylor (8).

8. Substitua z por Z^{-1} no desenvolvimento (6) e na sua condição de validade para obter uma representação da função $(1+Z)^{-1}$, em potências negativas de Z que seja válida no exterior do círculo $|Z| = 1$.

$$\text{Resp. } (1+Z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z^{-n-1} \quad (|Z| > 1).$$

9. Prove que, quando $x \neq 0$,

$$\frac{\sin(x^2)}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \dots$$

10. Represente a função

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

por meio de uma série de potências positivas e negativas de $(z-1)$, que converja para $f(z)$ quando $0 < |z-1| < 2$.

$$\text{Resp. } f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

58. Séries de Laurent. Indiquemos por z' um ponto arbitrário de qualquer um dos dois círculos concêntricos C_1 e C_2 ,

$$|z' - z_0| = r_1, \quad |z' - z_0| = r_2,$$

com centro num ponto z_0 , onde $r_2 < r_1$ (Fig. 40). Demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema. Se f é analítica sobre C_1 e C_2 e na região entre esses dois círculos, então, em cada ponto z entre os círculos $f(z)$ é representada por uma série convergente de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$.

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

onde

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(3) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

sendo cada integral calculada no sentido anti-horário.

A série em (1) é chamada *série de Laurent*.

No caso em que f é analítica no interior de C_1 , exceto no próprio ponto z_0 , o raio r_2 pode ser tomado arbitrariamente pequeno. O desenvolvimento (1) é válido, então, quando

$$0 < |z - z_0| < r_1.$$

Se f é analítica no interior de C_1 e sobre C_1 , o integrando da integral (3) é uma função analítica de z' no interior de C_2 e sobre C_2 , pois, $-n+1 \leq 0$; a integral portanto tem o valor zero e a série torna-se uma série de Taylor.

Como os integrandos das integrais nas fórmulas (2) e (3), são funções analíticas de z' na região anular, qualquer caminho fechado C , contido na região e envolvendo z_0 pode ser usado como caminho de integração no lugar dos círculos C_1 e C_2 . Assim, a série de Laurent pode ser escrita

$$(4) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad (r_2 < |z - z_0| < r_1),$$

onde

$$(5) \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Em certos casos, é claro, alguns dos coeficientes podem ser iguais a zero. De fato, a função

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2},$$

por exemplo, já tem a forma (4), onde $z_0 = 1$. Aqui $A_{-2} = 1$ e os demais A_n são iguais a zero, o que está de acordo com a fórmula (5). Como esta função é analítica em todos os pontos, exceto no ponto $z = 1$, a curva C pode ser qualquer caminho fechado envolvendo esse ponto.

Em geral, os coeficientes são encontrados sem o uso das fórmulas acima. Por exemplo, quando $|z| > 0$, os desenvolvimentos

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

e

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

decorrem das respectivas séries de Maclaurin. Veremos (Sec. 62) que tais representações são únicas, de modo que essas séries devem ser as séries de Laurent para $z_0 = 0$.

Para a demonstração do teorema, notemos primeiro que, de acordo com a fórmula integral de Cauchy,

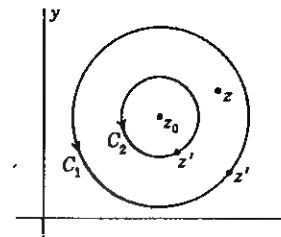


FIG. 40

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z},$$

visto que C_1 e C_2 juntos formam a fronteira de uma região fechada sobre a qual f é analítica. Na primeira integral, como na demonstração do teorema de Taylor, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} + \frac{z - z_0}{(z' - z_0)^2} + \dots \\ &\quad + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z' - z_0)^n} + \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n (z' - z)}. \end{aligned}$$

Na segunda integral escrevemos

$$-\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (z' - z_0)}$$

e fatoramos $(z - z_0)$ no denominador para obter a forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{z - z_0} + \frac{z' - z_0}{(z - z_0)^2} + \dots \\ &\quad + \frac{(z' - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^n (z - z')}. \end{aligned}$$

Assim, da fórmula (6), decorre que

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \\ &\quad \quad \quad + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + Q_n, \end{aligned}$$

onde a_n e b_n são os números representados pelas fórmulas (2) e (3), e

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^n (z' - z)}, \\ Q_n &= \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \int_{C_2} \frac{(z' - z_0)^n f(z')}{z - z'} dz'. \end{aligned}$$

Seja $r = |z - z_0|$; então $r_2 < r < r_1$. A demonstração de que R_n tende para zero quando n tende para o infinito, é a mesma que a usada no teorema de Taylor. Se M é o valor máximo de $|f(z')|$ sobre C_2 , então

$$|Q_n| \leq \left(\frac{r_2}{r}\right)^n \frac{Mr_2}{r - r_2},$$

e, portanto, Q_n tende para zero quando n tende para o infinito. A demonstração do teorema está completa.

59. Propriedades de Séries. Seja S_N a soma dos N primeiros termos de uma série infinita de números complexos,

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Então, se $z_n = x_n + iy_n$, podemos escrever

$$(2) \quad S_N = \sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N x_n + i \sum_{n=1}^N y_n;$$

para que exista o limite de S_N , quando N tende para o infinito, é necessário e suficiente que os limites das somas acima dos números reais x_n e y_n existam. Com efeito, se existem esses limites, indicados respectivamente por X e Y , isto é, se

$$(3) \quad X := \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

e se X_N e Y_N representam as duas somas no segundo membro da equação (2), então, correspondendo a cada número positivo ϵ , existe um inteiro N_ϵ tal que

$$|X_N - X| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |Y_N - Y| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que } N > N_\epsilon.$$

Mas então $|S_N - (X + iY)| < \epsilon$ sempre que $N > N_\epsilon$, pois

$$|X_N + iY_N - X - iY| \leq |X_N - X| + |Y_N - Y| < \epsilon,$$

e, portanto,

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = X + iY.$$

Por outro lado, se a condição (4) é satisfeita para algum par de números reais X e Y , então, a cada número positivo ϵ corresponde um inteiro M_ϵ tal que $|S_N - X - iY| < \epsilon$ quando $N > M_\epsilon$. Como $S_N = X_N + iY_N$, segue-se que $|X_N - X| < \epsilon$ e $|Y_N - Y| < \epsilon$ quando $N > M_\epsilon$; isto é, $X_N \rightarrow X$ e $Y_N \rightarrow Y$ quando $N \rightarrow \infty$. Assim, a condição (4) implica na condição (3), e reciprocamente.

Uma condição necessária para a convergência de uma série de números reais é que o n -ésimo termo tenda para zero, quando n tende para o infinito. Se a

série (1) deve convergir, então as séries (3) devem ambas convergir e, assim, x_n e y_n devem tender para zero quando n tende para o infinito. Logo z_n deve tender para zero quando n tende para o infinito, isto é, *uma condição necessária para a convergência da série (1) é que*

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0.$$

Em particular, os termos de uma série convergente são limitados: $|z_n| < M$ para todo inteiro positivo n , onde M é uma certa constante positiva.

Se a série (1) é *absolutamente convergente*, isto é, se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

converge, então segue-se do teste de comparação para séries de números reais positivos que as duas séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

convergem. Assim, as séries (3) são absolutamente convergentes e, portanto, convergentes, visto que a convergência absoluta de uma série de números reais implica na convergência da própria série. Como as séries (3) convergem, a série (1) converge, isto é, *a convergência absoluta de uma série de números complexos implica na convergência da própria série*.

Teorema. *Se uma série de potências*

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge quando $z = z_1$, então a mesma é absolutamente convergente para todo valor de z , tal que $|z| < |z_1|$.

Como a série, cujos termos são $a_n z_1^n$ converge, esses termos são todos limitados, isto é,

$$|a_n z_1^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

para alguma constante positiva M . Escrevemos

$$\frac{|z|}{|z_1|} = k, \quad \text{onde } |z| < |z_1|;$$

então

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n < M k^n.$$

A série, cujos termos são os números positivos $M k^n$, é uma série geométrica; ela é convergente, pois $k < 1$. Concluímos, do teste de comparação, que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

converge, e o teorema está provado.

A região de convergência da série (6) é portanto um círculo com centro na origem. O maior círculo com centro na origem, tal que a série converge em cada ponto interior, é chamado *círculo de convergência* da série de potências. De acordo com o teorema acima, a série não pode convergir em nenhum ponto z_1 fora desse círculo, pois, se a mesma convergisse em z_1 , convergiria também nos pontos inteiros do círculo com centro na origem passando por z_1 , e o primeiro círculo não poderia ser o círculo de convergência.

Quando z é substituído por $(z - z_0)$, a região de convergência da série

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

passa a ser um círculo com centro no ponto z_0 . Da mesma maneira, podemos ver que, se a série

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

converge quando $z = z_1$, então a mesma é absolutamente convergente para todo valor de z tal que

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|.$$

A região de convergência da série (8) é o exterior de um círculo com centro no ponto z_0 .

60. Convergência Uniforme. Seja C_0 um círculo $|z| = r_0$ no interior do qual uma série de potências converge, e seja S a função que representa a soma dessa série, isto é,

$$(1) \quad S(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

o resto após os N primeiros termos pode ser escrito

$$(2) \quad R_N(z) = S(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n z^n.$$

Quando $|z| \leq |z_1|$, onde $|z_1| < r_0$, podemos escrever

$$(3) \quad \left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1|^n.$$

O limite desta última soma, quando m tende para o infinito, é o resto na série dos valores absolutos dos termos da série (1). Mas, de acordo com o teorema na seção precedente, a série (1) é absolutamente convergente quando $z = z_1$, e portanto o resto

$$\rho_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1|^n$$

tende para zero quando N tende para o infinito, isto é, dado qualquer número positivo ϵ , existe um inteiro N_ϵ tal que $\rho_N < \epsilon$ sempre que $N \geq N_\epsilon$. Como os termos da última série são todos números reais não negativos, segue-se que, para todo inteiro m maior que N ,

$$\sum_{n=N}^m |a_n| |z_1|^n \leq \rho_N.$$

Em vista da relação (3), então,

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right| \leq \rho_N$$

para todo inteiro m maior que N , e, portanto, o resto (2) satisfaz à relação

$$|R_N(z)| \leq \rho_N < \epsilon \quad \text{quando } N \geq N_\epsilon.$$

Observe que N_ϵ é independente de z quando $|z| \leq |z_1|$, de modo que está estabelecido o seguinte teorema.

Teorema. A série de potências (1) é uniformemente convergente para todos os pontos z inteiros a e sobre qualquer círculo $|z| = |z_1|$, que se situa no interior do círculo de convergência.

A soma parcial

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

da série (1) é um polinômio, sendo, portanto uma função contínua de z . Para mostrarmos que seu limite $S(z)$ é contínuo, quando $|z| \leq |z_1|$, notemos primeiro que, como

$$S(z) = S_N(z) + R_N(z),$$

$$(4) \quad |S(z + \Delta z) - S(z)| = |S_N(z + \Delta z) - S_N(z) + R_N(z + \Delta z) - R_N(z)| \leq |\Delta S_N| + |R_N(z + \Delta z)| + |R_N(z)|,$$

onde $\Delta S_N = S_N(z + \Delta z) - S_N(z)$. Queremos mostrar que, dado um número positivo qualquer ϵ , existe um número positivo δ tal que

$$(5) \quad |S(z + \Delta z) - S(z)| < \epsilon \quad \text{quando } |\Delta z| < \delta.$$

Em vista da convergência uniforme acima estabelecida, existe um inteiro N_ϵ tal que $|R_N| < \epsilon/3$ para todo ponto na região $|z| \leq |z_1|$, quando $N \geq N_\epsilon$. Quando $N = N_\epsilon$, existe um número δ tal que $|\Delta S_N| < \epsilon/3$, quando $|\Delta z| < \delta$, pois $S_N(z)$ é contínua. O valor do segundo membro da desigualdade (4) é, portanto, menor do que ϵ , e a desigualdade (5) está, assim estabelecida.

Acabamos de mostrar que uma série de potências representa uma função contínua no interior do seu círculo de convergência.

Substituindo-se z por $(z - z_0)$ ou seu inverso, os resultados acima podem ser estendidos imediatamente a séries dos tipos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

com modificações óbvias. Assim, se a segunda série é convergente na região anular $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$, ela é uniformemente convergente para todos os valores de z nessa região, e sua soma representa aí uma função contínua de z .

61. Integração e Derivação de Séries de Potências. Na seção precedente, mostramos que uma série de potências representa uma função contínua $S(z)$ no interior do círculo de convergência. Vamos provar nesta seção que S é analítica no interior desse círculo.

Teorema 1. Seja C um caminho contido no interior do círculo de convergência de uma série de potências, e seja g uma função contínua sobre C . Então, a série obtida multiplicando-se cada termo da série de potências por $g(z)$, pode ser integrada, termo a termo ao longo de C , isto é,

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C z^n g(z) dz = \int_C S(z) g(z) dz.$$

Como a soma $S(z)$ da série de potências é uma função contínua, a integral do produto

$$S(z)g(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n g(z) + R_N(z)g(z)$$

existe. Os termos da soma finita acima também são contínuos sobre o caminho C , de modo que suas integrais ao longo de C existem, e consequentemente a integral do resto $R_N(z)g(z)$ deve existir. Assim,

$$(2) \quad \int_C S(z)g(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C z^n g(z) dz + \int_C R_N(z)g(z) dz.$$

Sejam M e L o valor máximo de $g(z)$ sobre C e o comprimento de C , respectivamente. Em vista da convergência uniforme estabelecida na Sec. 60, para cada número positivo ϵ existe um número inteiro N_ϵ tal que, em todos os pontos z sobre C ,

$$|R_N(z)| < \epsilon \quad \text{quando } N \geq N_\epsilon.$$

Como ϵ e N são independentes de z , podemos escrever

$$\left| \int_C R_N(z)g(z) dz \right| < \epsilon M L \quad \text{quando } N \geq N_\epsilon.$$

Segue-se, então, da fórmula (2), que

$$\int_C S(z)g(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C z^n g(z) dz,$$

o que é o mesmo que a fórmula (1), e o Teorema 1 está demonstrado.

Quando $g(z) = 1$ para todos os valores de z e C é um caminho fechado contido no interior do círculo de convergência da série de potências, então, para todo inteiro n ,

$$\int_C z^n g(z) dz = \int_C z^n dz = 0.$$

Segue-se da fórmula (1) que

$$\int_C S(z) dz = 0$$

para todo caminho fechado contido no interior do círculo de convergência; assim, de acordo com o teorema de Morera, a função S é analítica. O resultado pode ser enunciado como segue.

Teorema 2. *Uma série de potências representa uma função analítica no interior do seu círculo de convergência.*

Se uma função f é analítica no interior de um círculo C , com centro na origem e tem um ponto singular z_0 sobre C tal que f ou sua derivada de alguma ordem não tenha limite, quando z tende para z_0 a partir do interior de C , então a série de Maclaurin para $f(z)$ deve divergir no exterior de C . Pois, se assim não fosse, a série representaria uma função analítica F no interior de um círculo contendo C . Como $F(z) = f(z)$ no interior de C , f e suas derivadas teriam limites em z_0 .

A função $e^z(z-1)/(z-1)$ é um exemplo de função, cuja série de Maclaurin tem um círculo de convergência que se estende além de seu ponto singular ($z=1$). Como esta função é a mesma que a função inteira e^z quando $z \neq 1$, sua série de Maclaurin converge em todos os pontos.

Teorema 3. *Uma série de potências pode ser derivada termo a termo em cada ponto z interior ao círculo de convergência, isto é,*

$$(3) \quad S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (|z| < r_0).$$

Para se estabelecer o teorema, seja z_1 um ponto qualquer interior ao círculo, e seja C um caminho fechado envolvendo z_1 e contido no interior do círculo. Então, como S é analítica,

$$S'(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(z) dz}{(z - z_1)^2}.$$

Na fórmula (1) escrevemos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_1)^2},$$

então

$$\int_C z^n g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n dz}{(z - z_1)^2} = \frac{d}{dz_1} (z_1^n)$$

e

$$\int_C S(z)g(z) dz = S'(z_1).$$

Portanto,

$$S'(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz_1} (z_1^n),$$

e o teorema está demonstrado.

Os resultados acima podem ser estendidos imediatamente a séries de potências positivas ou negativas de $(z - z_0)$.

O teorema 2 é útil, às vezes, para se estabelecer a analiticidade de funções ou para o cálculo de limites. Como um exemplo simples, vamos mostrar que a função f definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{quando } z \neq 0, \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

é inteira. Como a série de Maclaurin para a função seno converge para $\sin z$ para todo z , a série obtida multiplicando-se cada termo dessa série pelo fator z^{-1} , isto é,

$$(4) \quad 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

converge para $f(z)$ se $z \neq 0$. Mas a série (4), obviamente, converge para $f(0)$ quando $z = 0$. Assim, $f(z)$ é representada pela série de potências convergente (4) para todo z , e portanto f é uma função inteira. Em particular, f é contínua em $z = 0$ e, como $z^{-1} \sin z = f(z)$ quando $z = 0$, tem-se

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = 1,$$

resultado já conhecido de antemão, porque o limite acima não é senão a definição da derivada de $\sin z$ em $z = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Derivando a série de Maclaurin para $(1 - z)^{-1}$, obtenha as representações

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}, \quad \frac{2}{(1 - z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} \quad (|z| < 1).$$

2. Desenvolva a função z^{-1} em potências de $(z - 1)$; a seguir, obtenha, por derivação, o desenvolvimento de z^{-2} em potências de $(z - 1)$. Dê a região de validade.

3. Integre a série de Maclaurin para $(1 + z)^{-1}$ ao longo de um caminho, interior ao círculo de convergência, que vai de $z' = 0$ a $z' = z$ para obter a representação

$$\log(z + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1).$$

4. Sendo $f(z) = (e^{cz} - 1)/z$ quando $z \neq 0$ e $f(0) = c$, prove que f é inteira.
5. Desenvolva $\operatorname{sh} z$ em potências de $(z - \pi i)$ para mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\operatorname{sh} z}{z - \pi i} = -1.$$

6. Sendo $f(z) = z^{-1} \log(z + 1)$ quando $z \neq 0$ e $f(0) = 1$, prove que f é analítica no domínio $|z| < 1$.
7. Sendo $f(z) = (z^2 - \pi^2/4)^{-1} \cos z$ quando $z^2 \neq \pi^2/4$ e $f(\pm \pi/2) = -1/\pi$, prove que f é inteira.
8. Seja f uma função analítica em z_0 tal que $f(z_0) = 0$. Por meio de séries mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Note também que o resultado decorre diretamente da definição de $f'(z_0)$.

9. Sejam f e g funções analíticas em z_0 tais que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Prove que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10. Seja f analítica em z_0 tal que $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$ e seja g a função definida por

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \quad \text{quando } z \neq z_0,$$

$$\text{e} \quad g(z_0) = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}.$$

Mostre que g é analítica em z_0 .

62. Unicidade de Representações por Séries de Potências. A série na fórmula (3), da seção precedente, é uma série de potências que converge para $S'(z)$ no interior do círculo de convergência C_0 da série

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z).$$

Conseqüentemente, essa série pode ser derivada termo a termo, isto é,

$$S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} \quad (|z| < r_0).$$

Da mesma maneira, a derivada de $S(z)$ de qualquer ordem pode ser obtida por derivações sucessivas termo a termo da série. Além disso,

$$S(0) = a_0, \quad S'(0) = a_1, \quad S''(0) = 2!a_2, \quad \dots,$$

de modo que os coeficientes são exatamente aqueles que comparecem no desenvolvimento em série de Maclaurin de $S(z)$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

A generalização para séries de potências positivas de $(z - z_0)$ é imediata. Assim, temos o seguinte teorema sobre a unicidade da representação de funções em série de potências.

Teorema 1. Se a série

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge para $f(z)$ em todos os pontos interiores a algum círculo $|z - z_0| = r_0$, então essa série é exatamente a série de Taylor para f em potências de $(z - z_0)$.

Como um exemplo, temos, substituindo z por z^2 na série de Maclaurin para $\sin z$, que

$$(3) \quad \sin(z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{4n-2}}{(2n-1)!} \quad (|z| < \infty).$$

Esta série deve coincidir com a série a ser obtida, desenvolvendo-se a função $\sin(z^2)$ diretamente em série de Maclaurin.

Segue-se do Teorema 1 que, se a série (2) converge para zero em cada ponto de uma vizinhança de z_0 , então os coeficientes a_n devem ser iguais a zero.

Teorema 2. Se a série

$$(4) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

converge para $f(z)$ em todos os pontos de uma região anular em torno de z_0 , então essa série é a série de Laurent para a função f em potências de $(z - z_0)$ nessa região.

A demonstração deste teorema decorre do teorema 1 da seção precedente, estendido a séries de potências de $(z - z_0)$ positivas e negativas. Se tomamos como C um caminho fechado, contido no interior da região anular e envolvendo z_0 e se escrevemos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{m+1}},$$

a integração termo a termo nos conduz a

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{m+1}}.$$

São estes os coeficientes na série de Laurent.

63. Multiplicação e Divisão. Sejam as duas séries de potências

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z)$$

convergentes no interior de um círculo $|z| = r_0$. As somas $f(z)$ e $g(z)$ são então funções analíticas nessa região, e, portanto, seu produto tem um desenvolvimento em série de Maclaurin, válido na região,

$$(2) \quad f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (|z| < r_0).$$

Os coeficientes c_n são dados pelas fórmulas

$$c_0 = f(0)g(0) = a_0 b_0, \\ c_1 = f(0)g'(0) + f'(0)g(0) = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} [f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)] \\ = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

etc., onde usamos o fato de que as duas séries (1) são as séries de Maclaurin para f e g . Com o auxílio da fórmula para a n -ésima derivada do produto de duas funções, podemos ver que

$$(3) \quad f(z)g(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z \\ + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \\ + \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n + \dots \quad (|z| < r_0).$$

A série (3) coincide com a série obtida, multiplicando-se as duas séries (1) termo a termo e agrupando-se termos que têm como fator uma mesma potência de z ; esta última é o *produto de Cauchy* das duas séries dadas. Assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema. O produto de duas séries de potências converge para o produto de suas somas em todos os pontos interiores aos dois círculos de convergência.

Se $g(z) \neq 0$ numa vizinhança da origem, o quociente $f(z)/g(z)$ é uma função analítica aí. Logo, o quociente tem um desenvolvimento em série de Maclaurin

$$(4) \quad q(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n,$$

onde $\gamma_0 = q(0)$, $\gamma_1 = q'(0)$, $\gamma_2 = q''(0)/2!$, etc. Alguns dos seus primeiros coeficientes podem ser calculados em termos de a_n e b_n , derivando-se o quociente $f(z)/g(z)$ sucessivamente. Os resultados coincidem com os obtidos, efetuando-se a divisão da primeira das séries (1) pela segunda. Este método identifica os primeiros termos do quociente de duas séries de potências com a série de potências que representa o quociente. Em geral, isto já é suficiente na prática, embora se possa mostrar que as séries são inteiramente idênticas.

A adição de duas séries de potências termo a termo é sempre válida na parte comum de suas regiões de convergência. Isto decorre da definição da soma de uma série. A multiplicação por uma constante é um caso particular do teorema, acima, sobre o produto de duas séries; consequentemente, duas séries podem ser subtraídas termo a termo.

64. Exemplos. Consideremos a seguinte função f :

$$(1) \quad f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2},$$

que é analítica em todos os pontos, exceto nos dois pontos $z = 1$ e $z = 2$.

Exemplo 1. Obter a série de Maclaurin para f .

Tal série deve representar $f(z)$ quando $|z| < 1$. Nesse domínio $|z/2| < 1$. Conhecendo-se a soma de série geométrica (Sec. 57), podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^n - z^n \right] \quad (|z| < 1).$$

Como esta série, em potências de z , converge para $f(z)$ quando $|z| < 1$, ela deve ser a série de Maclaurin para f ; o coeficiente de z^n no desenvolvimento

$$(2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n \quad (|z| < 1)$$

deve ter o valor $f^{(n)}(0)/n!$; assim, $f^{(n)}(0) = n!(2^{-n-1} - 1)$.

Exemplo 2. Escrever a série de Laurent, que representa f na região anular $1 < |z| < 2$.

Nesse domínio anular $|1/z| < 1$ e $|z/2| < 1$, e assim,

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (1 < |z| < 2).$$

Tal representação de f na referida região é única e, portanto, a série em (3) é a de Laurent para f aí. Como o coeficiente de z^{-1} tem o valor $A_{-1} = 1$, a fórmula (5), Sec. 58, para os coeficientes A_n mostra que, se C é um caminho fechado contido na região anular que envolve o ponto $z = 1$, então $\int_C f(z) dz = 2\pi i$.

Exemplo 3. Obter a série de Laurent para f no domínio $|z| > 2$. Nesse domínio $|1/z| < 1$ e $|2/z| < 1$; portanto

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{1-2/z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}} \quad (|z| > 2).$$

Esta é a série de Laurent procurada. Aqui o coeficiente de z^{-1} é zero; consequentemente, a integral de f ao longo de qualquer caminho fechado que contenha os pontos $z = 1$ e $z = 2$ no seu interior, tem o valor zero.

Exemplo 4. Determinar alguns dos primeiros termos da série de Laurent para a função g no domínio $0 < |z| < \pi$, onde

$$g(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\dots}$$

O denominador da última fração consiste de uma série de potências que converge para $z^{-1} \operatorname{sh} z$, quando $z \neq 0$ e para a unidade quando $z = 0$. Assim, a soma dessa série não se anula no domínio $|z| < \pi$, e a representação em série de potências da fração pode ser obtida efetuando-se a divisão; é assim

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\dots} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots \quad (|z| < \pi).$$

Logo, a série de Laurent para g no domínio especificado começa com os termos

$$(5) \quad \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots \quad (0 < |z| < \pi).$$

65. Zeros de Funções Analíticas. Se uma função f é analítica em z_0 , existe uma vizinhança de z_0 onde f é representada por uma série de Taylor,

$$(1) \quad f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < r_0),$$

onde $a_0 = f(z_0)$ e $n!a_n = f^{(n)}(z_0)$. Se z_0 é um zero de f , então $a_0 = 0$. Quando

$$(2) \quad f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

mas $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, então z_0 se diz *zero de ordem m* e

$$(3) \quad f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n \quad (a_m \neq 0, |z - z_0| < r_0).$$

Seja $g(z)$ a soma da série na fórmula (3),

$$(4) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < r_0).$$

Note que $g(z_0) = a_m \neq 0$. Como a série (4) converge, g é uma função contínua em z_0 . Assim, para cada número positivo ϵ , existe um número δ tal que

$$|g(z) - a_m| < \epsilon \quad \text{sempre que } |z - z_0| < \delta.$$

Se $\epsilon = |a_m/2|$ e δ_1 é o valor correspondente de δ ,

$$|g(z) - a_m| < \frac{1}{2}|a_m| \quad \text{quando } |z - z_0| < \delta_1.$$

Segue-se que $g(z) \neq 0$ em qualquer ponto da vizinhança $|z - z_0| < \delta_1$, pois se $g(z) = 0$, a desigualdade acima não seria válida.

O argumento permanece válido quando $m = 0$, caso em que $g = f$ e $f(z_0) = 0$. Assim, acabamos de estabelecer o seguinte teorema.

Teorema. *Se uma função é analítica num ponto, então, a menos que a função seja identicamente zero, existe uma vizinhança desse ponto onde a função não se anula, exceto, possivelmente, no próprio ponto. Em outras palavras, os zeros de uma função analítica não identicamente nula são isolados.*

EXERCÍCIOS

1. Seja g a função $\operatorname{sen}(z^2)$. Usando a série de Maclaurin (3), Sec. 62, para $g(z)$, mostre que $g^{(2n-1)}(0) = 0$ e $g^{(4n)}(0) = 0$, onde $n = 1, 2, \dots$
2. Use o desenvolvimento obtido no exemplo 4, Sec. 64, para mostrar que, se C é o círculo $|z| = 1$,

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} = -\frac{1}{3}\pi i.$$

3. Obtenha a representação em série de Maclaurin

$$z \operatorname{ch}(z^2) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{4n+1} \quad (|z| < \infty).$$

4. Represente a função $(z+1)/(z-1)$ por (a) série de Maclaurin, e dê a região de validade para a representação; (b) série de Laurent no domínio $|z| > 1$.

$$\text{Resp. (a)} -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1); \quad \text{(b)} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad (|z| > 1).$$

5. Obtenha o desenvolvimento da função $(z-1)/z^2$ em (a), série de Taylor em potências de $(z-1)$ e dê a região de validade; (b) obtenha série de Laurent no domínio $|z-1| > 1$.

$$\text{Resp. (a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(z-1)^n \quad (|z-1| < 1);$$

$$\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(z-1)^{-n} \quad (|z-1| > 1).$$

6. Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-1} \quad (|z| > 0).$$

7. Dê dois desenvolvimentos em série de Laurent, em potências de z , para a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

e especifique as regiões onde esses desenvolvimentos são válidos.

$$\text{Resp.} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} \quad (0 < |z| < 1); - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3} \quad (|z| > 1).$$

8. Escreva duas séries de Laurent em potências de z que representem a função $z^{-1}(1+z^2)^{-1}$ em alguns domínios, e especifique esses domínios.

9. Obtenha os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

10. Obtenha alguns dos primeiros termos dos desenvolvimentos em série de Laurent

$$(a) \csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z - \left[\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} \right] z^3 + \dots \quad (0 < |z| < \pi);$$

$$(b) \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \dots \quad (0 < |z| < 2\pi).$$

11. Escreva o desenvolvimento em série de Laurent da função $(z - k)^{-1}$ no domínio $|z| > k$, onde k é real e $k^2 < 1$. Obtenha, então, fazendo $z = \exp(i\theta)$, as seguintes fórmulas para somas de séries de seno e co-seno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{k \operatorname{sen} \theta}{p(k, \theta)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos(n\theta) = \frac{k \cos \theta - k^2}{p(k, \theta)},$$

onde $p(k, \theta) = 1 + k^2 - 2k \cos \theta$ e $k^2 < 1$.

12. Seja $F(r, \theta)$ uma função de z , onde $z = r \exp(i\theta)$, que é analítica numa região anular em torno da origem que contém o círculo $r = 1$. Tome esse círculo como caminho C na fórmula para os coeficientes A_n no desenvolvimento em série de Laurent de $F(r, \theta)$ em potências de z , e mostre que

$$F(1, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(1, \theta') d\theta' + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(1, \theta') \cos[n(\theta - \theta')] d\theta'.$$

Este é o desenvolvimento em série de Fourier da função complexa $F(1, \theta)$ da variável real θ sobre o círculo unitário. Se $u(\theta)$ e $v(\theta)$ são as partes real e imaginária de $F(1, \theta)$, mostre que o desenvolvimento acima permanece válido quando F é substituída por u ou por v . As restrições aqui feitas sobre as funções reais u e v , são, entretanto, muito mais fortes do que seria necessário, para que tais funções possam ser representadas por suas séries de Fourier¹.

CAPÍTULO 7

Resíduos e Polos

66. Resíduos. Se existe alguma vizinhança de um ponto singular z_0 de uma função f onde f é analítica, exceto no próprio ponto z_0 , então z_0 se diz *ponto singular isolado* de f .

A função $1/z$ constitui um exemplo simples. Ela é analítica, exceto em $z = 0$; logo a origem é um ponto singular isolado dessa função. A função

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

tem três pontos singulares isolados, a saber, $z = 0$ e $z = \pm i$.

Como outro exemplo, a função

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/z)}$$

tem uma infinidade de pontos singulares isolados, todos sobre o segmento do eixo real de $z = -1$ a $z = 1$, a saber, $z = \pm 1, z = \pm 1/2, z = \pm 1/3$, etc. Mas a origem $z = 0$ também é um ponto singular; este ponto singular não é isolado, pois toda a vizinhança da origem contém outros pontos singulares da função.

A função $\operatorname{Log} z$ também tem um ponto singular na origem, que não é isolado, visto que cada vizinhança da origem contém pontos do eixo real negativo onde $\operatorname{Log} z$ não é analítica.

Quando z_0 é um ponto singular isolado de f , existe um número positivo r_1 tal que a função é analítica em cada ponto z para o qual $0 < |z - z_0| < r_1$. Nesse domínio a função é representada pela série de Laurent

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots,$$

onde os coeficientes são dados pelas fórmulas (2) e (3), Sec. 58. Em particular,

¹ Para outras condições suficientes, ver, por exemplo, o livro do autor "Fourier Series and Boundary Value Problems", pp. 70, 86, 1941.

$$(2) \quad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

onde C é um caminho fechado envolvendo z_0 , percorrido no sentido positivo, tal que f é analítica sobre C e no interior de C , exceto no próprio ponto z_0 .

Note que a representação (1) da função f é aquele particular desenvolvimento de Laurent em torno de z_0 , que é válido em $0 < |z - z_0| < r_1$. O ponto z pode estar arbitrariamente próximo de z_0 . Nesse desenvolvimento, b_1 , coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$, é chamado *resíduo* de f no ponto singular isolado z_0 .

Toda função tem um resíduo em cada um dos seus pontos singulares isolados, já que a série de Laurent em torno do ponto, representa a função numa vizinhança do ponto, exceto no próprio ponto. O valor de resíduo, porém, pode ser zero. De acordo com a fórmula (2), o resíduo de f em z_0 é o valor da integral de $(2\pi i)^{-1} f(z)$ ao longo de qualquer caminho fechado C , envolvendo z_0 e orientado no sentido positivo, desde que f seja analítica sobre C e no interior de C exceto no ponto z_0 .

Temos agora um método poderoso para o cálculo de certas integrais ao longo de caminhos fechados. Por exemplo, vamos calcular a integral da função $e^{-z}(z-1)^{-2}$ no sentido positivo ao longo do círculo C_0 : $|z| = 2$. O único ponto singular, $z = 1$, da função é interior ao círculo. Podemos usar a série de Taylor para e^{-z} em torno do ponto $z = 1$ para escrevermos

$$(3) \quad \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} - \frac{e^{-1}}{z-1} + e^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \quad (|z-1| > 0).$$

Deste desenvolvimento de Laurent vemos que o resíduo da nossa função em $z = 1$ é $-e^{-1}$; segue-se imediatamente que

$$(4) \quad \int_{C_0} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = -\frac{2\pi i}{e}.$$

Como outro exemplo, mostraremos que, para o círculo C_0 acima,

$$(5) \quad \int_{C_0} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0.$$

Como $1/z^2$ é analítica em todos os pontos, exceto na origem, o integrando em (5) também tem esse comportamento. O ponto singular é interior a C_0 . Com o auxílio da série de Maclaurin para a função exponencial, podemos escrever o desenvolvimento de Laurent

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} + \dots \quad (|z| > 0).$$

O resíduo do integrando no seu ponto singular $z = 0$ é, portanto, zero ($b_1 = 0$), ficando estabelecido a anulação da integral (5).

67. O Teorema do Resíduo. Se uma função tem apenas um número finito de pontos singulares num domínio, então esses pontos singulares são necessariamente isolados.

Teorema. Seja C um caminho fechado tal que uma função f é analítica sobre C e no interior de C exceto num número finito de pontos singulares z_1, z_2, \dots, z_n inteiros a C . Se K_1, K_2, \dots, K_n são os resíduos de f nesses pontos singulares, então

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i(K_1 + K_2 + \dots + K_n),$$

onde a integral é calculada no sentido anti-horário ao longo de C .

Seja C_j um círculo com centro em z_j , cujo raio é suficientemente pequeno para que n círculos C_1, C_2, \dots, C_n e o caminho C não se encontrem (Fig. 41). Esses círculos, juntamente com o caminho C , formam a fronteira de uma região fechada multiplamente conexa na qual f é analítica. De acordo com o teorema de Cauchy-Goursat, estendido a tais regiões (Sec. 49),

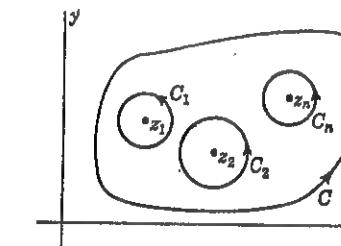


FIG. 41

$$\int_C f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0.$$

Esta relação reduz-se à fórmula (1), pois

$$K_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z) dz \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

e o teorema está demonstrado.

Como exemplo, vamos calcular a integral

$$(2) \quad \int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz,$$

onde C é o círculo $|z| = 2$, percorrido no sentido anti-horário. Os dois pontos singulares, $z = 0$ e $z = 1$, do integrando se situam no interior de C . Para determinarmos o resíduo K_1 em $z = 0$, podemos escrever

EMBRAE - FABR - BIBLIOTECA

$$\begin{aligned}\frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(5 - \frac{2}{z}\right) \left(\frac{-1}{1-z}\right) = \left(-5 + \frac{2}{z}\right) (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \dots \quad (0 < |z| < 1).\end{aligned}$$

Logo, $K_1 = 2$.

Para o resíduo K_2 em $z = 1$, podemos usar a série de Taylor

$$\frac{1}{z} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots \quad (|z-1| < 1)$$

a fim de determinarmos os coeficientes no desenvolvimento de Laurent do integrando em torno do ponto $z = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) \frac{1}{z} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots]\end{aligned}$$

quando $0 < |z-1| < 1$. O coeficiente de $(z-1)^{-1}$ neste produto é 3, isto é $K_2 = 3$. Portanto

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(K_1 + K_2) = 10\pi i.$$

Neste exemplo é mais simples escrever o integrando como soma de suas frações parciais, isto é,

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = \int_C \frac{2}{z} dz + \int_C \frac{3}{z-1} dz = 2\pi i(2+3) = 10\pi i.$$

Há ainda outro método para calcular a integral (2). Observamos que, de acordo com a fórmula (3) da secção 58, a integral dividida por $2\pi i$ é o coeficiente b_1 no desenvolvimento de Laurent do integrando em torno da origem no domínio, consistindo do exterior do círculo $|z| = 1$. Esse desenvolvimento pode ser escrito facilmente como segue. Se $|z| > 1$,

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z^2} \frac{1}{1-(1/z)} = (5z-2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}}.$$

O coeficiente b_1 de $1/z$ neste produto é 5. Logo o valor da integral é $10\pi i$.

68. Polos. Na série de Laurent (1), Sec. 66, que representa uma função f num domínio $0 < |z - z_0| < r_1$ em torno de um ponto singular isolado z_0 , a série de potências negativas de $(z - z_0)$ é chamada *parte principal* de $f(z)$ em torno de z_0 .

A estrutura da parte principal tem grande influência sobre o comportamento da função na proximidade do ponto singular.

Suponhamos que a parte principal contenha somente um número finito de termos; então existe um inteiro m tal que os coeficientes b_{m+1}, b_{m+2}, \dots são todos nulos, e

$$\begin{aligned}(1) \quad f(z) &= \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\end{aligned}$$

quando $0 < |z - z_0| < r_1$, para algum número positivo r_1 , onde $b_m \neq 0$. O ponto singular isolado z_0 é então chamado *polo de ordem m* da função f .

Um polo de ordem $m = 1$ é *polo simples*.

Quando a parte principal de f em torno do ponto z_0 tem uma infinidade de termos, o ponto se diz *ponto singular essencial* da função.

A função

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{3}{z-2} + 2 + (z-2).$$

por exemplo, tem um polo simples em $z = 2$. Seu resíduo nesse polo é 3.

Como outro exemplo, a função

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \dots \quad (|z| > 0)$$

tem um polo de ordem 3 em $z = 0$, com resíduo aí de $1/6$. Mas a função

$$\operatorname{ch} \frac{1}{z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} \quad (|z| > 0)$$

tem um ponto singular essencial em $z = 0$. Seu resíduo aí é zero.

Quando f tem um polo de ordem m em z_0 , escrevemos

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) \quad (0 < |z - z_0| < r_1),$$

equação que define a função ϕ numa vizinhança de z_0 , exceto no próprio ponto z_0 . Então, em vista da fórmula (1), quando $0 < |z - z_0| < r_1$ podemos escrever

$$\begin{aligned}(2) \quad \phi(z) &= b_1(z - z_0)^{m-1} + b_2(z - z_0)^{m-2} + \dots \\ &\quad + b_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m},\end{aligned}$$

onde $b_m \neq 0$. Definimos agora $\phi(z)$ em $z = z_0$ como sendo o número b_m ,

$$\phi(z_0) = b_m.$$

Então a representação (2) é válida numa vizinhança de z_0 , inclusive no próprio ponto z_0 . Como a série em (2) é uma série de potências convergente, a função ϕ é analítica em z_0 .

Nossa definição de $\phi(z_0)$, agora, pode ser escrita

$$(3) \quad \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m.$$

Como este limite existe e $b_m \neq 0$, segue-se que $|f(z)|$ sempre tende para o infinito quando z se aproxima de um polo z_0 .

Se uma função pode ser tornada analítica num seu ponto singular z_0 , atribuindo-se um valor conveniente à função nesse ponto, diz-se que a função tem um *ponto singular removível* em z_0 .

Acabamos de mostrar, então, que, quando f tem um polo de ordem m em $z = z_0$, a função

$$(4) \quad \phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

tem um ponto singular removível em z_0 , e que $\phi(z_0) \neq 0$. Além disso, a fórmula (2) é o desenvolvimento de $\phi(z)$ em série de Taylor em torno do ponto z_0 , de modo que

$$(5) \quad b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Quando $m = 1$, esta fórmula para o resíduo de f em z_0 pode ser escrita como

$$(6) \quad b_1 = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z),$$

em vista da fórmula (3).

Reciprocamente, suponhamos f uma função tal que o produto

$$(z - z_0)^m f(z)$$

possa ser definido em z_0 de modo a ser analítico nesse ponto. Como antes, m é um inteiro positivo. Seja $\phi(z)$ aquele produto. Então, em alguma vizinhança de z_0 ,

$$\begin{aligned} \phi(z) = (z - z_0)^m f(z) &= \phi(z_0) + \phi'(z_0)(z - z_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m + \cdots \end{aligned}$$

Logo, em cada ponto, distinto de z_0 , da vizinhança, é válido

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z - z_0} \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m}, \end{aligned}$$

e, se $\phi(z_0) \neq 0$, segue-se que f tem um polo de ordem m em z_0 com o resíduo dado pela fórmula (5) nesse ponto. Podemos enunciar este teste para polos como se segue.

Teorema. Suponhamos que uma função f satisfaça às seguintes condições: para algum inteiro positivo m existe um valor $\phi(z_0)$, diferente de zero, tal que a função

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

é analítica em z_0 . Então f tem um polo de ordem m em z_0 . Seu resíduo em z_0 é dado pela fórmula (5) se $m > 1$ e pela fórmula (6) se $m = 1$.

Observe que as condições do teorema são satisfeitas quando f tem a forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

onde a função ϕ é analítica em z_0 e $\phi(z_0) \neq 0$. Por exemplo, o resíduo da função $\exp(-2z)/z^3$ no seu polo $z = 0$ de ordem 3 é $(-2)^2/2! = 2$.

69. Quocientes de Funções Analíticas. O método básico para o cálculo do resíduo de uma função num ponto singular isolado z_0 , consiste em determinar o coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ na série de Laurent, que representa a função em todos os pontos arbitrariamente próximos de z_0 . No caso em que z_0 é um ponto singular essencial, não dispomos de nenhum outro método. Mas para resíduos em polos, as fórmulas (5) e (6) da seção precedente podem ser usadas com vantagem quando a função ϕ é suficientemente simples.

Existe um outro método para a determinação do resíduo de uma função f num polo z_0 , quando f tem a forma fracionária

$$(1) \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

onde p e q são ambas analíticas em z_0 e $p(z_0) \neq 0$. Notemos primeiro que z_0 é um ponto singular de f quando, e somente quando $q(z_0) = 0$. Com efeito, se $q(z_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança de z_0 onde $q(z) \neq 0$ (Sec. 65). Assim, existe alguma vizinhança de z_0 em que p e q são analíticas e $q(z) \neq 0$; logo f seria analítica em z_0 .

Por outro lado, se $q(z_0) = 0$, então $q(z) \neq 0$ em qualquer outro ponto numa vizinhança suficientemente pequena de z_0 e, assim, z_0 é um ponto singular isolado de f .

Quando p e q satisfazem às condições $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ e $p(z_0) \neq 0$, então a função f tem um polo simples em z_0 e o resíduo de f tem o valor

$$(2) \quad b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Para procedermos à demonstração deste enunciado, vamos representar as funções analíticas p e q da fórmula (1) por séries de Taylor numa vizinhança $|z - z_0| < r_1$ para escrevermos

$$(3) \quad (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \dots}{q'(z_0) + q''(z_0)(z - z_0)/2! + \dots} \quad (0 < |z - z_0| < r_1).$$

O quociente de séries aqui representa uma função ϕ que é analítica em z_0 e, como $\phi(z_0) = p(z_0)/q'(z_0) \neq 0$, o teorema na secção precedente se aplica para completar a demonstração.

De modo análogo, podemos ver que, se $p(z_0) \neq 0$ e

$$q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

mas $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, então a função f tem um polo de ordem m em z_0 . Quando $m = 2$, o resíduo de f no polo z_0 de segunda ordem é dado pela fórmula

$$(4) \quad b_1 = 2 \frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2},$$

como podemos ver calculando $\phi'(z_0)$, onde

$$\phi(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \dots}{q''(z_0)/2! + q'''(z_0)(z - z_0)/3! + \dots} \quad (|z - z_0| < r_1).$$

Mas quando $m > 2$, as fórmulas correspondentes para o resíduo são um tanto complicadas.

Para ilustrar uma aplicação da fórmula (2), considere a função

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

que tem os pontos singulares $z = \pm n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) e $z = 0$. A derivada do denominador, $q'(z) = \cos z$, não se anula em nenhum desses pontos. Como o numerador p e o denominador q , aqui são funções inteiras e p não se anula nos pontos acima mencionados, esses pontos são todos polos simples e o resíduo de $\cot z$ em cada um dos polos $z_0 = 0, \pm n\pi$ é a unidade, visto que

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{\cos z_0}{\cos z_0} = 1.$$

Como outro exemplo, vamos computar o resíduo da função

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

na origem. Aqui $p(z) = 1$, $q(z) = z(e^z - 1)$, $q(0) = q'(0) = 0$, $q''(0) = 2$ e $q'''(0) = 3$. Assim, a origem é um polo de segunda ordem e, de acordo com a fórmula (4), o resíduo de f aí é $-1/2$.

EXERCÍCIOS

1. Se uma função h é analítica num ponto z_0 e $h(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é um polo simples da função

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$$

e que $h(z_0)$ é o resíduo de f nesse polo. Dê exemplos.
2. Se $h(z_0) = 0$ no exercício 1, mostre que z_0 é um ponto singular removível de f .
3. Mostre que todos os pontos singulares de cada uma das seguintes funções são polos. Determine a ordem m de cada polo e o resíduo K da função no polo.

$$(a) \frac{z+1}{z^2-2z}; \quad (b) \operatorname{tgh} z; \quad (c) \frac{1-\exp(2z)}{z^4};$$

$$(d) \frac{\exp(2z)}{(z-1)^2}; \quad (e) \frac{z}{\cos z}; \quad (f) \frac{\exp z}{z^2+\pi^2}.$$

$$\text{Resp. (a)} \quad m=1, K=-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \quad \text{(b)} \quad m=1, K=1; \quad \text{(c)} \quad m=3, K=-\frac{4}{3}.$$

4. Determine o resíduo em $z = 0$ da função

$$(a) \operatorname{cosec}^2 z; \quad (b) z^{-3} \operatorname{cosec}(z^2); \quad (c) z \cos \frac{1}{z}.$$

$$\text{Resp. (a)} \quad 0; \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{6}; \quad \text{(c)} \quad -\frac{1}{2}.$$

5. Calcule a integral

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$$

ao longo do círculo (a) $|z - 2| = 2$; (b) $|z| = 4$, percorrido no sentido anti-horário.

$$\text{Resp. (a)} \quad \pi i; \quad \text{(b)} \quad 6\pi i.$$

6. Idem para a integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

e o círculo (a) $|z| = 2$; (b) $|z + 2| = 3$.

Resp. (a) $\pi i/32$; (b) 0.

7. Sendo C o círculo $|z| = 2$ percorrido no sentido positivo, calcule a integral

$$(a) \int_C \operatorname{tg} z \cdot dz; \quad (b) \int_C \frac{dz}{\operatorname{sh} 2z}; \quad (c) \int_C \frac{\operatorname{ch} \pi z \cdot dz}{z(z^2 + 1)}.$$

Resp. (a) $-4\pi i$; (b) $-\pi i$.

8. Calcule a integral de f no sentido positivo ao longo do círculo unitário com centro na origem, quando $f(z)$ é

$$(a) z^{-2}e^{-z}; \quad (b) z^{-1} \operatorname{cosec} z; \quad (c) z^{-2} \operatorname{cosec} z; \quad (d) z \exp \frac{1}{z}.$$

Resp. (a) $-2\pi i$; (b) 0; (d) πi .

9. Se uma função f é analítica em z_0 e se z_0 é um zero de ordem m de f , prove que a função $1/f$ tem um polo de ordem m em z_0 .

10. Sejam f uma função analítica num domínio D e z_0 o único zero de f em D . Se C é um caminho fechado em D que envolve z_0 , e C percorrido no sentido positivo, mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m,$$

onde o inteiro positivo m é a ordem do zero em questão. O quociente f'/f é conhecido como *derivada logarítmica* de f ; ele é a derivada de $\log f$.

70. Cálculo de Integrais Reais Impróprias. Uma das aplicações importantes da teoria dos resíduos, consiste no cálculo de certos tipos de integrais definidas reais. Tais integrais aparecem freqüentemente em problemas de Física, especialmente em problemas de contorno nas equações diferenciais de derivadas parciais. Por vezes, essas integrais apresentam-se como integrais no plano complexo, embora possam ser reduzidas a integrais definidas reais.¹ Os exemplos expostos nesta e nas subseqüentes secções ilustram alguns métodos úteis.

Integrais reais do tipo

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

onde p e q são polinômios sem fator comum, podem ser calculadas facilmente com o auxílio da teoria dos resíduos, desde que os zeros de q sejam conhecidos. Vamos supor que q não tenha zeros reais; se $q(x)$ contém um fator $(x - x_0)^k$, onde $k = 1, 2, \dots$, então, no ponto x_0 , o integrando torna-se infinito e de tal ordem que a integral imprópria

¹ Cf., por exemplo, os capítulos 6-8 do livro "Operational Mathematics", do autor, 2^a ed., 1958.

$$\int_a^{x_0} \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

onde a é uma constante real qualquer, não converge.

A integral (1) existe quando, e somente quando, o grau de q é maior do que o de p , no mínimo, por duas unidades e q não tem zeros reais. O método de frações parciais, que pode também ser usado para o cálculo de integrais deste tipo, está intimamente relacionado com o método dos resíduos.

Como nosso primeiro exemplo, vamos usar resíduos para determinar o valor da integral elementar

$$(2) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

A segunda integral representa uma integração, ao longo de todo o eixo real, da função

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z + i} \frac{1}{z - i},$$

função esta que tem polos simples nos pontos $z = i$ e $z = -i$.

Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > 1$ (Fig. 42). Integrando f , no sentido anti-horário, ao longo da fronteira da região semicircular, temos

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i K_1,$$

onde K_1 é o resíduo de f no polo $z = i$. Da expressão (3) para $f(z)$ vemos que

$$K_1 = \left. \frac{1}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

Portanto, quando $R > 1$,

$$(4) \quad \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi - \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Ora, $|z| = R$ quando z está sobre C_R , e

$$|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1.$$

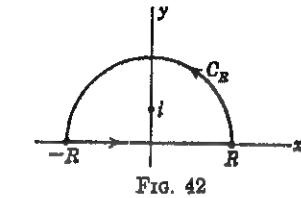


FIG. 42

Conseqüentemente,

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{R^2 - 1} = \frac{\pi R}{R^2 - 1},$$

e esta quantidade tende para zero quando R tende para o infinito. Segue-se da fórmula (4) que

$$(5) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi;$$

logo,

$$(6) \quad I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

O limite (5) é conhecido como *valor principal de Cauchy* da integral na fórmula (6). Em geral,

$$(7) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Quando cada uma das integrais

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) dx$$

tem um valor, como ocorre no caso acima, o valor principal (7) é o mesmo que o da integral. Mas se $f(x) = x$, por exemplo, o valor principal da integral é zero, ao passo que o valor da integral em si não existe.

71. Outros Exemplos. Vamos determinar o valor integral

$$(1) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2},$$

a qual é ainda do tipo discutido na secção anterior.

Por um raciocínio análogo, podemos ver que os pontos singulares da função

$$(2) \quad f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$$

consistem de pólos simples nos pontos $z = \pm 3i$ e de polos de segunda ordem em $z = \pm 2i$. O resíduo K_1 no polo $z = 3i$ tem o valor

$$K_1 = \left. \frac{z^2}{(z + 3i)(z^2 + 4)^2} \right|_{z=3i} = -\frac{3}{50i}.$$

Para determinarmos o resíduo K_2 em $z = 2i$, escrevemos

$$\phi(z) = (z - 2i)^2 f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z + 2i)^2}.$$

Então $K_2 = \phi'(2i)$, em vista da fórmula (5), Sec. 68, isto é,

$$K_2 = \frac{(-4 + 9)(2i + 2i)^2 (4i) - (2i)^2 [5(2)(4i) + (4i)^2 (4i)]}{5^2 (4i)^4}$$

que se reduz a

$$K_2 = -\frac{13i}{200}.$$

Seja C_R o semicírculo superior do círculo $|z| = R$, onde $R > 3$ agora. Integrando, no sentido anti-horário, ao longo da fronteira da região semicircular, temos

$$(3) \quad \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i(K_1 + K_2) = \frac{\pi}{100}.$$

Mas quando z está sobre C_R , vemos, da fórmula (2), que

$$|f(z)| \leq \frac{R^2}{(R^2 - 9)(R^2 - 4)^2}.$$

O comprimento de C_R é πR . Segue-se, como antes, que o limite, quando R tende para o infinito, da segunda integral em (3) é zero. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{100},$$

ou, em vista de (1), $I = \pi/200$.

72. Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonométricas. Como exemplo de outro tipo de integral que pode ser calculada por meio de integrais curvilíneas e da teoria dos resíduos, consideremos a integral

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1}.$$

Como $|\cos z|$ cresce como e^y quando y tende para o infinito, o método usado acima não se aplica aqui sem algumas modificações.

Ora, $\cos x$ é a parte real de $\exp(ix)$; portanto,

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} \, dx}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Escrevemos } f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$$

e notamos que

$$(3) \quad |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1 \text{ quando } y \geq 0.$$

As singularidades da nossa função f são os polos simples $z = \pm i$. Em $z = i$ o resíduo de f é

$$K_1 = \left. \frac{e^{iz}}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{1}{2ei},$$

e, portanto,

$$(4) \quad \int_{-R}^R \frac{e^{iz} \, dx}{x^2 + 1} + \int_{C_R} \frac{e^{iz} \, dz}{z^2 + 1} = 2\pi i K_1 = \frac{\pi}{e},$$

onde C_R é o semicírculo superior do círculo $|z| = R$ ($R > 1$). Em vista da desigualdade (3), segue-se, como antes, que a segunda integral em (4) tende para zero quando R tende para o infinito, de modo que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz} \, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e}.$$

A parte real desta integral coincide portanto, com o valor da própria integral. Então, de acordo com (2),

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2e}.$$

EXERCÍCIOS

Estabeleça as seguintes fórmulas de integração com o auxílio de resíduos:

$$1. \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6}.$$

$$3. \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{6}.$$

$$2. \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

$$4. \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$5. \int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (a \geq 0). \quad 6. \int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2e}.$$

$$7. \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (a > b > 0).$$

$$8. \int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab)e^{-ab} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$9. \int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax \, dx}{x^4 + 4} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen} a \quad (a > 0).$$

Use resíduos para determinar os valores das seguintes integrais:

$$10. \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$11. \int_{-\infty}^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}.$$

Resp. $-\pi/5$.

$$12. \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$13. \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

$$14. \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

Resp. $-(\pi/e) \operatorname{sen} 2$.

$$15. \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \, dx}{(x + a)^2 + b^2}.$$

73. Integrais Definidas de Funções Trigonométricas. O método de resíduos é útil no cálculo de integrais definidas do tipo

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \, d\theta,$$

onde F é um quociente de polinômios de $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$. Se considerarmos θ como argumento de z sobre o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, então podemos escrever

$$(2) \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz \, d\theta,$$

e a integral (1) passa a representar a integral de linha de uma função racional de z ao longo do círculo unitário. A integral de linha, por sua vez, pode ser calculada pelo teorema do resíduo, desde que conheçamos os zeros do polinômio no denominador.

Como exemplo, vamos computar o valor da integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin \theta}.$$

Observe que o denominador do integrando nunca se anula. Em termos de pontos z sobre o círculo unitário, podemos escrever, de acordo com as fórmulas (2).

$$\frac{5}{4} + \sin \theta = \frac{5}{4} + \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{1}{4iz} (2z^2 + 5iz - 2)$$

$$e \quad I = \int_C \frac{4 dz}{2z^2 + 5iz - 2} = \int_C \frac{2 dz}{(z + 2i)(z + \frac{1}{2}i)},$$

onde C é o círculo $|z| = 1$ (Fig. 43). O único ponto singular do integrando, interior a C , é o polo simples $z = -\frac{1}{2}i$, e o resíduo do integrando nesse ponto é $2/(-\frac{1}{2}i + 2i)$, ou $4/3i$. Portanto,

$$I = 2\pi i \frac{4}{3i} = \frac{8}{3}\pi.$$

74. Integração em torno de um Ponto de Ramificação. Vamos ilustrar agora um método para calcular uma integral real, quando as singularidades do integrando da integral de linha incluem um ponto de ramificação e um corte de ramo.

Seja x^{-k} , onde $0 < k < 1$ e $x > 0$, o valor principal daquela potência de x , ou seja, o número real positivo $\exp(-k \log x)$. Computaremos a integral real impropria

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{-k}}{x+1} dx \quad (0 < k < 1),$$

que representa a função beta com argumentos k e $1-k$ (Exercício 9). A integral existe quando $0 < k < 1$, pois o integrando se comporta como x^{-k} na proximidade de $x = 0$ e como x^{-k-1} quando x tende para o infinito.

Seja z^{-k} este ramo da função potência:

$$(2) \quad z^{-k} = \exp(-k \log z) = \exp[-k(\log r + i\theta)] \quad (0 < \theta < 2\pi, r > 0),$$

onde $z = r \exp(i\theta)$. Então, em termos do valor principal r^{-k} ,

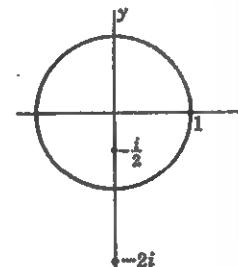


Fig. 43

$$(3) \quad z^{-k} = r^{-k} \exp(-ik\theta) \quad (0 < \theta < 2\pi, r > 0),$$

e quando $\theta = 0$ aqui, $z^{-k} = r^{-k} = x^{-k}$. A função

$$f(z) = \frac{z^{-k}}{z+1}$$

é analítica em todos os pontos, exceto no polo simples $z = -1$, no ponto de ramificação $z = 0$ e no corte de ramo $\theta = 0$. Quando $\theta = 0$, $f(z)$ se torna o integrando da integral (1). O resíduo de f em $z = -1$ é o valor de z^{-k} nesse ponto, ou seja, $\exp(-ik\pi)$. Assim, a integral de f ao longo do caminho fechado na figura 44, consistindo de arcos circulares C e C_0 de raios R e r_0 , respectivamente, e de segmentos L_1 e L_2 dos raios $\theta = \epsilon$ e $\theta = 2\pi - \epsilon$, pode ser escrita

$$(4) \quad \int_{L_1} f(z) dz + \int_C f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz + \int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \exp(-ik\pi),$$

quando $R > 1$, $r_0 < 1$, e ϵ é uma constante positiva pequena.

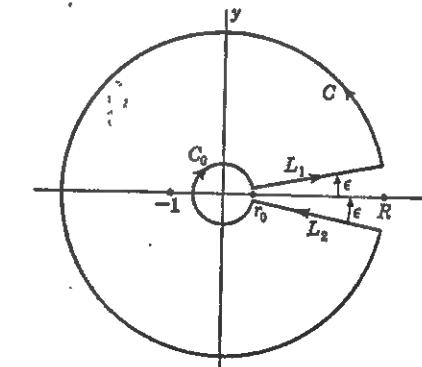


Fig. 44

Sobre o segmento L_1 , $z = r \exp(ie)$ e $z^{-k} = r^{-k} \exp(-ike)$. Sobre L_2 , $z = r \exp[i(2\pi - \epsilon)] = r \exp(-ie)$ e $z^{-k} = r^{-k} \exp[-ik(2\pi - \epsilon)]$. A soma das integrais de f ao longo de L_1 e de L_2 é, portanto, a seguinte combinação de integrais definidas em relação à variável r :

$$\exp(ie - ike) \int_{r_0}^R \frac{r^{-k} dr}{re^{ie} + 1} + \exp[-ie - ik(2\pi - \epsilon)] \int_{R}^{r_0} \frac{r^{-k} dr}{re^{-ie} + 1}.$$

Os integrandos aqui são funções contínuas de r e ϵ na região fechada $r_0 \leq r \leq R$, $0 \leq \epsilon \leq \pi/2$; logo, as integrais, bem como seus coeficientes, são funções contínuas de ϵ em $\epsilon = 0$, e

$$(5) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz \right) = [1 - \exp(-2ik\pi)] \int_{r_0}^R \frac{r^{-k} dr}{r+1} \\ = 2i \exp(-ik\pi) \operatorname{sen} k\pi \int_{r_0}^R \frac{x^{-k} dx}{x+1},$$

A integral de f ao longo de C , onde $z = R \exp(i\theta)$, pode ser escrita

$$(6) \quad \int_C f(z) dz = iR \int_{2\pi-\epsilon}^{2\pi} \frac{R^{-k} \exp(-ik\theta)}{R e^{i\theta} + 1} e^{i\theta} d\theta \quad (R > 1).$$

O integrando da integral definida aqui é uma função contínua de θ no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo, a integral tem um limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, o qual é simplesmente a integral de zero a 2π . Analogamente, o limite da integral

$$(7) \quad \int_{C_\epsilon} f(z) dz = ir_0 \int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} \frac{r_0^{-k} \exp(-ik\theta)}{r_0 e^{i\theta} + 1} e^{i\theta} d\theta \quad (0 < r_0 < 1),$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$, existe. Assim, o limite, quando ϵ tende para zero, do primeiro membro da fórmula (4) existe e, como o segundo membro é independente de ϵ , decorre das fórmulas (5), (6) e (7) que

$$(8) \quad 2i \exp(-ik\pi) \operatorname{sen} k\pi \int_{r_0}^R \frac{x^{-k} dx}{x+1} + I + I_0 = 2\pi i \exp(-ik\pi),$$

onde

$$(9) \quad I = iR^{1-k} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(i\theta - ik\theta)}{R e^{i\theta} + 1} d\theta, \\ I_0 = -ir_0^{1-k} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(i\theta - ik\theta)}{r_0 e^{i\theta} + 1} d\theta.$$

Ora, $I \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ e $I_0 \rightarrow 0$ quando $r_0 \rightarrow 0$, pois

$$|I| \leq \frac{2\pi R}{R-1} R^{-k} \quad \text{e} \quad |I_0| \leq \frac{2\pi}{1-r_0} r_0^{1-k}$$

e $1-k > 0$. Também, o limite da primeira integral na fórmula (8) quando $R \rightarrow \infty$ e $r_0 \rightarrow 0$ é a integral (1), enquanto que o segundo membro da fórmula (8) é independente de R e de r_0 . Tomando limites sucessivos nessa fórmula quando $R \rightarrow \infty$ e $r_0 \rightarrow 0$, obtemos a fórmula de integração

$$(10) \quad \int_0^\infty \frac{x^{-k}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \quad (0 < k < 1).$$

EXERCÍCIOS

Use resíduos para estabelecer as seguintes fórmulas de integração.

1. (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = -\frac{\pi}{3}$; (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \pi \sqrt{2}$.
2. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}}$; (b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}}$.
3. $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 + k^2 - 2k \cos \theta} = \frac{\pi k^2}{1 - k^2}$.
4. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \pi(a^2 - 1)^{-1}$.
5. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} = \frac{3}{8}\pi$.
6. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta}{(2n)!} = \pi \frac{(2n)!}{(2n+1)!^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$.

7. Sabendo que $\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, integre $\exp(-x^2)$ ao longo da fronteira do retângulo $-a \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, e, em seguida faça a tender para o infinito para mostrar que

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) \cos(2bx) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \exp(-b^2).$$

8. Deduza a fórmula

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{kx} dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \quad (0 < k < 1)$$

usando uma integral de linha ao longo do caminho retangular sobre as retas $y = 0$, $x = \pm a$ e $y = 2\pi i$ (Fig. 45) e fazendo a tender para o infinito.

9. A função beta é a seguinte função de duas variáveis reais:

$$B(r, s) = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt \quad (r > 0, s > 0).$$

Faça a substituição $t = (x+1)^{-1}$ para mostrar que a integral calculada na seção 74 é $B(k, 1-k)$; assim,

$$B(k, 1-k) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \quad (0 < k < 1).$$

10. Com auxílio do caminho fechado ilustrado na figura 44, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4} \frac{1-k}{\cos(\frac{1}{2}k\pi)} \quad [-1 < k < 3, x^k = \exp(k \operatorname{Log} x)].$$

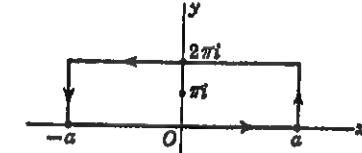


FIG. 45

11. Sabendo que $\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, integre $\exp(-z^2)$ ao longo da fronteira do setor circular $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq r \leq R$, e faça R tender para o infinito para mostrar que

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Nota: Para provar que a integral ao longo do arco circular tende para zero, mostre que seu valor absoluto é menor do que I , onde

$$I = R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \cos 2\theta) d\theta,$$

e que

$$I = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} \exp(-R^2 \sin \phi) d\phi < \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2R^2}{\pi} \phi\right) d\phi;$$

é óbvio, do gráfico da função seno, que $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ quando $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Efetue a integração no último membro da desigualdade para I , para mostrar que este membro tende para zero quando R tende para o infinito.

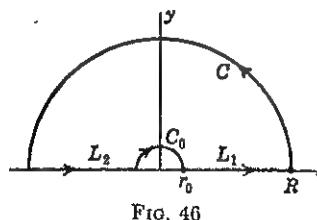
12. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

integrando a função $z^{-1}e^{iz}$ ao longo do caminho ilustrado na figura 46, consistindo dos semi-círculos C_0 e C , com raios r_0 e R , e dos segmentos L_1 e L_2 do eixo- x , e, a seguir, faça r_0 tender para zero e R para o infinito. (Veja a nota no exercício 11 que nos fornece um método para mostrar que a integral ao longo de C , tende para zero quando R tende para o infinito.) Use a fórmula de integração acima para mostrar que a função

$$S(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} dt$$

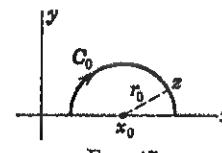
é a seguinte função escada: $S(k) = 1$ quando $k > 0$, $S(k) = -1$ quando $k < 0$ e $S(0) = 0$.



13. Deduza as fórmulas

$$(a) \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = 0; \quad (b) \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Nota: O caminho fechado na figura 46 pode ser usado aqui, juntamente com os resultados obtidos na seção 70 e no exercício 4, Sec. 72.



14. Suponha que um ponto $z = x_0$ sobre o eixo- x seja um polo simples de uma função f , e que K_0 seja o resíduo de f nesse polo. Mostre que, para algum número positivo r_1 , f tem a forma

$$f(z) = \frac{K_0}{z - x_0} + g(z) \quad (0 < |z - x_0| < r_1),$$

onde g é analítica em toda a vizinhança $|z - x_0| < r_1$. Se C_0 é o semicírculo superior do círculo $|z - x_0| = r_0$ (Fig. 47) percorrido no sentido horário, onde $r_0 < r_1$, prove que

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{C_0} f(z) dz = -iK_0\pi.$$

15. Deduza a fórmula de integração

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nota: Podemos usar o caminho fechado na figura 46 se escrevemos $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = \mathcal{O}(1 - e^{-2x})$. Veja o exercício 14 para o cálculo do limite da integral de linha ao longo de C_0 .

16. A integral da função

$$h(x) = \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

sobre um intervalo que contenha a origem não existe. Mostre que o valor principal da integral dessa função ao longo de todo o eixo- x ,

$$\text{V.P. } \int_{-\infty}^\infty h(x) dx = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-r_0} h(x) dx + \int_{r_0}^\infty h(x) dx \right] \quad (r_0 > 0),$$

existe, o que pode ser feito determinando-se esse valor com o auxílio do caminho fechado na figura 46 e do resultado obtido no exercício 14.

Resp. $2\pi/5$.

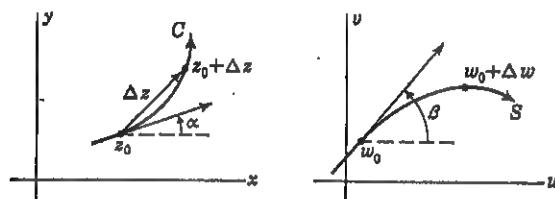
CAPÍTULO 8

Transformações Conformes

75. Rotação de Tangentes. Vamos examinar a mudança na direção de curvas num ponto z_0 sob uma transformação $w = f(z)$, quando a função f é analítica nesse ponto e $f'(z_0) \neq 0$. A imagem de um arco suave numa vizinhança de z_0 é um arco suave no plano- w , pois a função transformadora f é analítica em z_0 . A derivada

$$(1) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

onde $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, existe e é independente da maneira como Δz tende para zero.

FIG. 48. $\beta = \alpha + \psi_0$.

Quando $f'(z_0) \neq 0$, seja ψ_0 um dos valores do argumento do número $f'(z_0)$ e seja R_0 o número $|f'(z_0)|$; assim,

$$(2) \quad f'(z_0) = R_0 \exp(i\psi_0) \quad (R_0 > 0).$$

Então as duas fórmulas

$$(3) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = R_0,$$

$$(4) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \psi_0$$

são consequências da fórmula (1) (ver o exercício 7, Sec. 77).

Seja agora C uma curva suave por z_0 , e seja S sua imagem sob a transformação $w = f(z)$ (Fig. 48). Prescrito um sentido positivo de percurso ao longo de C , o sentido positivo correspondente ao longo de S fica determinado pela função transformadora f . Quando $z_0 + \Delta z$ é um ponto sobre C no sentido positivo a partir de z_0 , o limite do argumento de Δz quando Δz tende para zero é o ângulo de inclinação α da reta tangente orientada a C em z_0 . Se $w_0 = f(z_0)$ e se $w_0 + \Delta w$ é a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o argumento de Δw tende para o ângulo de inclinação β da tangente orientada a S em w_0 .

Como $\Delta w = \Delta z (\Delta w / \Delta z)$, um valor do argumento de Δw é dado pela fórmula

$$\arg \Delta w = \arg \Delta z + \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Quando Δz tende para zero, segue-se que

$$(5) \quad \beta = \alpha + \psi_0.$$

Assim, a tangente orientada à curva C em z_0 gira de um ângulo

$$(6) \quad \psi_0 = \arg f'(z_0)$$

sob a transformação $w = f(z)$, desde que f seja analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$.

76: Transformação Conforme. Como o ângulo ψ_0 é determinado pela função transformadora f e pelo ponto z_0 , ele é o mesmo para todas as curvas por z_0 . Se α_1 e α_2 são os ângulos de inclinação em z_0 de dois arcos orientados C_1 e

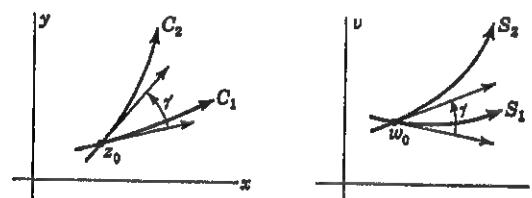


FIG. 49

C_2 , e se β_1 e β_2 são os ângulos correspondentes para as imagens S_1 e S_2 desses arcos, então

$$\beta_1 = \alpha_1 + \psi_0 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \alpha_2 + \psi_0$$

e, portanto, $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$. Isto é, o ângulo $\gamma = \beta_2 - \beta_1$ de S_1 para S_2 é o mesmo, em valor absoluto e sentido, que o ângulo $\alpha_2 - \alpha_1$ de C_1 para C_2 (Fig. 49).

Uma transformação que preserva ângulos em valor absoluto e sentido entre os pares de curvas em cada ponto de um domínio se diz *conforme* nesse domínio. Podemos enunciar nosso resultado como segue.

Teorema. *Em cada ponto z de um domínio onde f é analítica e $f'(z) \neq 0$ a transformação $w = f(z)$ é conforme.*

Doravante o termo *transformação conforme* será usado para significar a transformação por uma função analítica com derivada não nula.

De acordo com a fórmula (3) da secção precedente,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)| = R_0.$$

Portanto, a transformação aumenta os comprimentos de pequenos segmentos por um fator aproximadamente igual a R_0 . A imagem de cada figura pequena na proximidade do ponto é *conforme* à figura original no sentido de que as duas figuras têm aproximadamente a mesma forma. O coeficiente de acréscimo R_0 , bem como o ângulo de rotação ψ_0 , variam de ponto a ponto. Figuras grandes podem ser transformadas em figuras sem qualquer semelhança com as originais.

Um ponto no qual $f'(z) = 0$ é chamado *ponto crítico* da transformação.

O ponto $z = 0$ é ponto crítico da transformação

$$w = z^2 + 1.$$

Se escrevemos $z = r \exp(i\theta)$ e $w - 1 = \rho \exp(i\phi)$, então

$$\rho \exp(i\phi) = r^2 \exp(2i\theta)$$

onde decorre que cada raio $\theta = c$ emanando do ponto $z = 0$ é transformado num raio $\phi = 2c$ emanando do ponto $w = 1$. Assim, o ângulo entre dois raios emanando desse ponto crítico é duplicado por esta transformação.

A série de Taylor para a função f , em torno de um ponto crítico z_0 , pode ser usada para mostrar que, se as $m-1$ primeiras derivadas da função se anulam em z_0 e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, então o ângulo em z_0 entre duas curvas quaisquer é multiplicado por m sob a transformação $w = f(z)$. A prova é deixada como exercício.

Uma transformação *isogonal* preserva os valores absolutos de ângulos mas não necessariamente os sentidos. A transformação $w = \bar{z}$, reflexão no eixo real, é isogonal mas não conforme. A composta desta com uma transformação conforme f , $w = f(\bar{z})$, também é isogonal mas não conforme.

77. Exemplos. Como as funções elementares usadas no capítulo 4 são analíticas, as transformações ali discutidas são conformes, exceto nos pontos singulares e críticos.

Toda transformação *conforme* deve transformar curvas ortogonais em curvas ortogonais. Em particular, se f é analítica e $f'(z) \neq 0$ num ponto, a transformação

$$u + iv = f(x + iy)$$

transforma as curvas $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ que se interceptam nesse ponto nas retas $u = c_1$ e $v = c_2$ no plano- w . Como as retas são ortogonais, a curva $u(x, y) = c_1$ é *ortogonal* à curva $v(x, y) = c_2$.

Como outro exemplo, a transformação

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

leva a reta $y = x$ na reta $u = 0$, e a reta $x = 1$ na parábola cujas equações paramétricas são

$$\mu = 1 - y^2, \quad v = 2y;$$

esta é a parábola $v^2 = -4(u - 1)$ (Fig. 50). Se o sentido de crescimento de y é tomado como positivo nas duas retas no plano- z , o ângulo da primeira para a segunda é $\pi/4$. Quando $y > 0$ e y cresce ao longo da reta $y = x$, v cresce ao longo da reta $u = 0$, pois $v = 2y^2$, e assim, o sentido positivo da primeira imagem é para cima. O mesmo ocorre com a parábola, como podemos ver da segunda das equações paramétricas $v = 2y$. É fácil verificar que o ângulo da primeira imagem para a segunda no ponto $w = 2i$, que é a imagem do ponto $z = 1 + i$, é $\pi/4$, tal como exigido pela conformidade da transformação.

O argumento da derivada da função $w = z^2$ no ponto $z = 1 + i$ é

$$\psi_0 = \arg 2z = \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

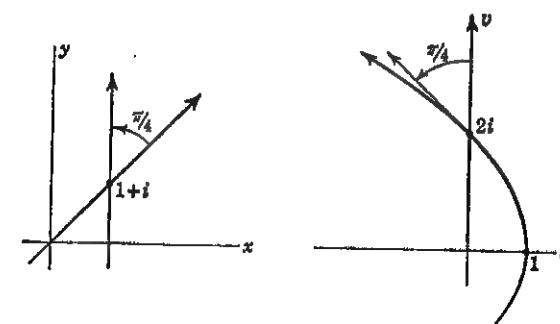


FIG. 50

Este é o ângulo de que a tangente a cada curva nesse ponto deve girar sob a transformação. O coeficiente de acréscimo $|f'(z_0)|$ de distâncias nesse ponto é $2\sqrt{2}$.

EXERCÍCIOS

- Mostre que a transformação $w = z^2$ muda direções de curvas no ponto $z = 2 + i$ de um ângulo $\text{arctg } 1/2$. Ilustre este fato usando alguma curva particular. Mostre que o coeficiente de acréscimo de distâncias nesse ponto é $2\sqrt{5}$.
- Mostre que a transformação $w = z^n$ muda direções no ponto $z = r_0 \exp(i\theta_0)$ de um ângulo $(n-1)\theta_0$, quando $r_0 > 0$ e $n > 0$. Qual é o coeficiente de acréscimo de distâncias no ponto?
- Resp. nr_0^{n-1} .
- Qual mudança de direções é produzida pela transformação $w = 1/z$ (a) no ponto $z = 1$; (b) no ponto $z = i$?
- Resp. (a) mudança somente no sentido; (b) nenhuma.
- Sob a transformação $w = 1/z$, mostre que as imagens das retas $y = x - 1$ e $y = 0$ são o círculo $u^2 + v^2 - u - v = 0$ e a reta $v = 0$. Ilustre as curvas graficamente, determine sentidos correspondentes das curvas e verifique a conformidade da transformação no ponto $z = 1$.
- Mostre por que a transformação $w = \exp z$ é conforme em todos os pontos. Note que a transformação dos segmentos orientados ilustrados nas figuras 7 e 8 do Apêndice 2 está de acordo com essa conclusão.
- Mostre que a transformação $w = \operatorname{sen} z$ é conforme em todos os pontos exceto em $z = \pm\pi/2$, $z = \pm 3\pi/2, \dots$. Note que a transformação dos segmentos orientados nas figuras 9, 10 e 11 do Apêndice 2 está de acordo com essa conclusão.
- Para uma função g de Δz e um número $g_0 = R_0 \exp(i\psi_0)$, suponha que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} g(\Delta z) = R_0 \exp(i\psi_0) \quad (R_0 > 0).$$

Então a cada número positivo ϵ , onde $\epsilon < R_0$, corresponde um número δ tal que o ponto $g(\Delta z)$ fique na vizinhança de g_0 de raio ϵ sempre que $|\Delta z| < \delta$. Esboce uma figura que mostre tal vizinhança e o ângulo $\Delta\psi = \arg[g(\Delta z)] - \psi_0$, onde $\psi_0 - \pi < \arg[g(\Delta z)] < \psi_0 + \pi$. Mostre que $|\operatorname{sen} \Delta\psi| < \epsilon/R_0$ e quando $|\Delta z| < \delta$ e que, portanto,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg[g(\Delta z)] = \psi_0;$$

o que justifica a fórmula (4), Sec. 75. Também justifique a fórmula (3), Sec. 75.

8. Seja f uma função analítica num ponto z_0 tal que

$$f(z_0) = w_0, \quad f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Use a série de Taylor para mostrar que, para algum número r_1 , o acréscimo $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ tem a forma

$$\Delta w = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) (\Delta z)^m [1 + \Delta z h(\Delta z)] \quad (|\Delta z| < r_1),$$

onde h é contínua em $\Delta z = 0$. Sob a transformação $w = f(z)$ do arco C no arco S na figura 48, mostre que os ângulos de inclinação satisfazem agora à relação

$$\beta = m\alpha + \arg[f^{(m)}(z_0)]$$

e, se δ designa agora o ângulo de S_1 para S_2 na figura 49, que $\delta = m\gamma$. Assim, a transformação não é conforme em z_0 .

78. Funções Harmônicas Conjugadas. Observamos na seção 20 que as partes real e imaginária de toda função analítica de uma variável complexa z são funções harmônicas de x e y . Isto é, elas satisfazem à equação de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e suas derivadas parciais até segunda ordem são funções contínuas de x e y .

As funções u e v são funções harmônicas conjugadas quando $u + iv$ é uma função analítica de z . Então, em vista das condições de Cauchy-Riemann, a diferencial de v pode ser escrita

$$(2) \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Suponhamos agora que u é uma função harmônica dada num domínio simplesmente conexo D . Podemos mostrar que sua conjugada harmônica v existe, e escrever uma fórmula explícita para $v(x, y)$.

O último membro da fórmula (2) será uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right);$$

mas esta condição se verifica, visto que a função u satisfaz à equação de Laplace (1). Segue-se então que o valor da integral curvilínea

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dy' \right]$$

é independente do caminho entre os limites de integração contanto que o caminho se situe no interior de D . Quando o ponto (x_0, y_0) é fixado, a integral representa uma função univalente de x e y ; seu valor se altera por uma constante aditiva quando o ponto (x_0, y_0) é mudado.

Vamos mostrar agora que a fórmula

$$(3) \quad v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dy' \right] + c,$$

onde c é uma constante real qualquer, representa uma conjugada harmônica de u . De acordo com as fórmulas do cálculo avançado para as derivadas de integrais curvilíneas,

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Estas são as condições de Cauchy-Riemann. Como as derivadas parciais, até segunda ordem, de u são contínuas, é evidente das equações (4) que essas derivadas de v também são contínuas. Segue-se (Sec. 18) que

$$u(x, y) + iv(x, y)$$

é uma função analítica f de z em D . Como $if(z) = -v + iu$, ambas as v e $-v$, onde v é dada pela fórmula (3), são conjugadas harmônicas da função dada u .

A função $u = xy$, por exemplo, é harmônica em todos os pontos. De acordo com a fórmula (3),

$$v = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-x' dx' + y' dy') + c.$$

A integração aqui pode ser feita por inspeção; também é fácil calculá-la integrando primeiro ao longo da reta $y = 0$ da origem ao ponto $(x, 0)$ e depois ao longo da reta $x' = x$ ao ponto (x, y) . O resultado é

$$v = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c;$$

esta função, bem como $-v$, é uma conjugada harmônica de xy . Aqui a função analítica é f ou if , onde

$$f(z) = xy + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)i + ic = -\frac{1}{2}iz^2 + ic.$$

79. Funções Inversas. Mostramos anteriormente que as inversas de várias funções elementares são analíticas. A inversa da função $w = \exp z$, por exemplo, é a função

$$z = \log w = \operatorname{Log} \rho + i\phi,$$

e o campo de variação de ϕ pode ser restrito de modo a tornar esta função univalente e analítica em qualquer domínio simplesmente conexo que não contenha o ponto $w = 0$. Além disso,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{w} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{dw/dz}.$$

Nesta altura é conveniente generalizar os resultados acima.

Teorema. Seja f uma função analítica num ponto $z = z_0$ onde $f'(z_0) \neq 0$; denotemos por w_0 o número $f(z_0)$. Então existe uma vizinhança do ponto w_0 no plano- w na qual a função

$$(1) \quad w = f(z)$$

tem uma única inversa

$$(2) \quad z = F(w),$$

no sentido de que a função F é univalente e analítica aí, e $F(w_0) = z_0$ e $w = f[F(w)]$; além disso,

$$(3) \quad F'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

A equação (1) pode ser escrita na forma

$$(4) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Como w é analítica no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, ela é analítica numa vizinhança desse ponto. As funções u e v , assim como suas derivadas parciais, são contínuas na vizinhança. Além da continuidade das funções u e v e das suas derivadas, uma outra condição para que as equações simultâneas (4) tenham soluções únicas para x e para y como funções contínuas de u e v , é que o jacobiano das funções u e v ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

seja diferente de zero no ponto (x_0, y_0) ¹. Em vista das condições de Cauchy-Riemann, o valor deste determinante pode ser escrito

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2,$$

e, por hipótese, este é diferente do zero no ponto z_0 . De fato, como f' é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, existe uma vizinhança do ponto z_0 que não contém zeros de f' (Sec. 65). Assim, fica estabelecido que, numa vizinhança do ponto $w_0 = u_0 + iv_0$, existe um único par de funções contínuas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tal que as funções

$$(5) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

satisfazem às equações (4) e tal que

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0).$$

¹Ver, por exemplo, Goursat-Hedrick, "Mathematical Analysis", vol. 1, p. 45.

As equações (5) podem ser escritas na forma complexa

$$z = F(w),$$

onde F é uma função contínua. Para mostrar que sua derivada existe, escrevemos

$$(6) \quad \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta w/\Delta z}$$

Como w é uma função analítica de z , ela é contínua, e como z é uma função contínua de w , segue-se que, quando Δw tende para zero, Δz também tende para zero, e reciprocamente. Ora, dw/dz existe e é diferente de zero; decorre, portanto, da fórmula (6) que

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w/\Delta z} = \frac{1}{dw/dz}.$$

Esta é a mesma que a fórmula (3).

Como $F'(w)$ existe numa vizinhança de w_0 , a função F é analítica af. A fórmula (3) poderia ter sido usada para se obterem as fórmulas de derivação para as inversas das funções elementares.

Retomemos o exemplo apresentado no início desta seção, considerando a função $w = \exp z$. Se $z_0 = 0$ aqui, então $w_0 = \exp(0) = 1$ e $f'(0) = 1 \neq 0$. De acordo com o teorema, existe uma única inversa correspondendo a esses pontos. Ora, sabemos que a função multivalente

$$z = \log w = \operatorname{Log} \rho + i(\phi + 2n\pi) \quad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$$

é uma inversa da função $\exp z$. Mas se

$$F(w_0) = z_0,$$

como enunciado no teorema, então $\log 1 = 0$. Como $\phi = 0$ e $\rho = 1$ quando $w = 1$, segue-se que $n = 0$ na fórmula acima para $\log w$. Assim, a única inversa neste caso é a função

$$F(w) = \operatorname{Log} \rho + i\phi \quad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi).$$

80. Transformação de Funções Harmônicas. O problema de determinar uma função que seja harmônica num domínio especificado e satisfaça condições prescritas sobre a fronteira do domínio, é um dos tipos mais antigos e proeminentes de problemas de contorno nas equações diferenciais de derivadas parciais. Se os valores da função são prescritos ao longo da fronteira, o problema é um *problema de Dirichlet* ou um *problema de contorno de primeira espécie*. Se os

valores da derivada normal da função harmônica são fixados sobre a fronteira, o problema é de *segunda espécie*, conhecido como *problema de Neumann*. Ocorrem também modificações e combinações desses tipos de condições de contorno.

Cada função analítica fornece um par de funções harmônicas. Como a função $\exp(iz)$, por exemplo, é inteira, as suas partes

$$(1) \quad G(x, y) = e^y \cos x, \quad H(x, y) = e^y \sin x$$

são harmônicas em todos os pontos. A função H satisfaz às condições

$$(2) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0,$$

$$(3) \quad H(0, y) = 0, \quad H(\pi, y) = 0,$$

$$(4) \quad H(x, 0) = \sin x \quad \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = 0,$$

as quais constituem um problema de Dirichlet para a faixa $0 < x < \pi$, $y > 0$. A mesma função H satisfaz, é claro, outras condições de contorno para este e outros domínios; por exemplo, sua derivada normal $\partial H / \partial x$ sobre a reta $x = \pi/2$ é zero.

Por vezes a solução de um dado problema pode ser descoberta por este método de funções conjugadas. Mas o sucesso deste procedimento dependerá da simplicidade do problema, e da nossa familiaridade com as partes real e imaginária de algumas funções analíticas. Apresentaremos agora um argumento adicional importante na resolução de tais problemas.

Seja H uma função harmônica qualquer das variáveis independentes x e y . Vamos introduzir novas variáveis independentes u e v de tal modo que a variável complexa $z = x + iy$ seja uma função analítica de $w = u + iv$,

$$z = f(w).$$

Vimos na seção 78 que, para a função harmônica dada $H(x, y)$, existe uma função harmônica conjugada $G(x, y)$; $H + iG$ é uma função analítica de z . Como z é uma função analítica de w , a função $H + iG$ também é uma função analítica de w e, portanto, H é uma função harmônica de u e v . O resultado pode ser enunciado como segue.

Teorema. *Toda função harmônica de x e y se transforma numa função harmônica de u e v por meio da mudança de variáveis*

$$x + iy = f(u + iv),$$

onde f é uma função analítica.

Como consequência, uma função que é harmônica em alguma vizinhança permanece harmônica sob uma mudança de variáveis provinda de uma transformação conforme

$$w = F(z),$$

onde $F(z)$ é analítica e $F'(z) \neq 0$ na vizinhança, uma vez que a função inversa $z = f(w)$ é analítica (Sec. 79).

Como ilustração do teorema, a função $H = e^y \operatorname{sen} x$, é harmônica em qualquer região do plano-xy. Sob a transformação

$$z = w^2,$$

temos $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$, e, portanto, a função

$$H = e^{2uv} \operatorname{sen}(u^2 - v^2)$$

é harmônica na região correspondente do plano-uv; isto é,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0.$$

81. Transformação de Condições de Contorno. As condições que prescrevem que uma função harmônica H ou sua derivada normal, seja constante sobre uma parte da fronteira de uma região são as mais comuns, embora essas não sejam os únicos tipos importantes de condições de contorno. Algumas dessas condições permanecem inalteradas sob a mudança de variáveis por meio de transformações conformes.

Uma curva ao longo da qual uma função H é constante é chamada *curva de nível* da função. Pela mudança de variáveis, uma curva de nível $H(x, y) = c$ no plano-xy é transformada na curva de nível

$$H[x(u, v), y(u, v)] = c$$

no plano-uv. Em particular, então, uma parte da fronteira de uma região no plano-xy sobre a qual H tem valor constante, é transformada numa curva no plano-uv, onde H toma o mesmo valor constante. Isto é, uma condição de contorno $H = c$ no problema original é transferida ao problema transformado.

Se a derivada normal de H se anula ao longo de uma curva no plano-xy, então a derivada normal de H como função de u e v também se anula sobre a curva correspondente no plano-uv.

Para ver isto, lembremo-nos primeiro de que o gradiente de uma função H é um vetor cuja direção é aquela em que a derivada direcional toma seu valor máximo no ponto considerado. O módulo do gradiente é esse valor máximo.

Mostra-se no cálculo avançado que a projeção do vetor gradiente sobre qualquer direção é a derivada direcional da função H nessa direção. Em particular, a projeção do gradiente sobre o eixo- x é $\partial H / \partial x$, e sobre o eixo- y é $\partial H / \partial y$. Assim, o vetor gradiente é representado pela fórmula

$$\operatorname{grad} H = \frac{\partial H}{\partial x} + i \frac{\partial H}{\partial y}.$$

O gradiente é perpendicular à curva de nível $H(x, y) = c$ em cada ponto.

Suponhamos que a derivada normal de $H(x, y)$ se anule, $dH/dn = 0$, ao longo de uma curva C (Fig. 51). Como dH/dn é a projeção do gradiente sobre a normal, a normal a C deve ser perpendicular ao gradiente de H em cada ponto. A tangente a C coincide, portanto, com o gradiente, e C é ortogonal às curvas de nível $H(x, y) = c$. A imagem S de C , por uma transformação conforme, é, assim, ortogonal às curvas de nível.

$$H[x(u, v), y(u, v)] = c,$$

que são as imagens de $H(x, y) = c$. Logo, a derivada normal de H como função de u e v , ao longo da curva S , deve também anular-se.

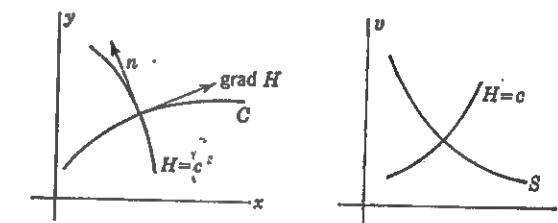


Fig. 51

A invariância dos dois tipos especiais de condições de contorno pode ser enunciada como segue.

Teorema. *Sob uma transformação $z = f(w)$, onde f é analítica e $f'(w) \neq 0$, permitem-se inalteradas as condições de contorno de um dos dois tipos*

$$H = c \quad \text{ou} \quad \frac{dH}{dn} = 0,$$

impostas a uma função H , harmônica.

Uma condição de contorno que não é de um desses tipos pode ser transformada numa condição que é substancialmente diferente da original. Naturalmente, podem-se obter condições de contorno para o problema transformado, partindo da transformação-particular, em qualquer caso. É interessante notar que,

sob uma transformação conforme, a razão de uma derivada direcional de H no plano- z para a derivada direcional de H na direção correspondente no plano- w é $|dw/dz|$. Em geral, esta razão não é constante ao longo de uma curva (ver os exercícios 3 e 8 abaixo).

EXERCÍCIOS

1. A função harmônica

$$H = 2 - x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

toma o valor 2 sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sob a mudança de variáveis $z = e^w$, determine H como função de u e v , e mostre diretamente que $H = 2$ sobre a imagem $u = 0$ do círculo, verificando assim um dos resultados da seção precedente para este caso especial.

2. A derivada normal da função harmônica

$$H = e^{-x} \cos y$$

é zero ao longo da reta $y = 0$; isto é, $\partial H / \partial y = 0$ sobre a reta. Determine H em termos de u e v sob a mudança de variáveis $z = w^2$, e mostre diretamente que as derivadas normais de H ao longo das imagens $u = 0$ e $v = 0$ da reta $y = 0$ também se anulam.

3. A derivada normal da função harmônica

$$H = 2y e^{-x} \cos y$$

é constante, $\partial H / \partial y = 2$, ao longo da reta $y = 0$. Sob a mudança de variáveis $z = w^2$, mostre que a derivada normal não é constante ao longo das imagens dessa reta; $\partial H / \partial u = 4v$ sobre $u = 0$ e $\partial H / \partial v = 4u$ sobre $v = 0$.

- Seja H uma função harmônica num domínio simplesmente conexo D do plano- xy . Então existe uma função G tal que $H + iG$ é função analítica de z em D (Sec. 78). Mostre que as derivadas parciais de H , de todas as ordens, são funções contínuas de x e y em D .
- Seja H uma solução de um problema de Neumann (Sec. 80). Mostre por que $H + c$ também é uma solução desse problema, onde c é uma constante qualquer.
- Por derivação parcial sob uma mudança de variáveis mostre que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right) \left| \frac{dw}{dz} \right|^2,$$

onde $w = u + iv$ é uma função analítica de $z = x + iy$ e $dw/dz \neq 0$. Note que desta fórmula para a transformação do laplaciano decorre que uma função harmônica H permanece harmônica sob a mudança de variáveis.

- Seja p uma função de x e y satisfazendo à *equação de Poisson*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S(x, y)$$

num domínio D_z do plano- xy , onde S é uma função dada. Se D_w é a imagem do domínio D_z por uma transformação $z = f(w)$, que é conforme em D_w , mostre que $p[x(u, v), y(u, v)]$ satisfaz à equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = S[x(u, v), y(u, v)] |f'(w)|^2$$

quando (u, v) está em D_w (ver o exercício 6).

- (a) Sob a mudança de variáveis descrita no exercício 6, mostre que

$$|\operatorname{grad} H(x, y)| = |\operatorname{grad} H[x(u, v), y(u, v)]| \left| \frac{dw}{dz} \right|.$$

(b) Por que o ângulo num ponto do plano- xy entre uma curva C e o vetor $\operatorname{grad} H$ é igual ao ângulo no ponto imagem do plano- uv entre a imagem S de C e $\operatorname{grad} H$? (c) Se σ é distância ao longo de C e s é distância ao longo de S , use os resultados de (a) e (b) para mostrar que a derivada direcional se transforma assim:

$$\frac{dH}{d\sigma} = \frac{dH}{ds} \left| \frac{dw}{dz} \right|.$$

CAPÍTULO 9

Aplicações de Transformações Conformes

Neste capítulo usaremos transformações conformes para resolver vários problemas da física envolvendo equação de Laplace com duas variáveis independentes, tais como: problemas de condução de calor, de potencial eletrostático e de escoamento de fluidos. Como o objetivo da exposição é apenas ilustrar métodos, os problemas serão mantidos em nível bastante elementar.

82. Temperaturas Estacionárias. Seja K a condutividade térmica do material num corpo sólido. Então o fluxo de calor por condução através de qualquer superfície no interior do sólido é dado por

$$(1) \quad \Phi = -K \frac{dT}{dn},$$

onde T designa a temperatura e n a distância normal à superfície. O fluxo Φ é a taxa de escoamento de calor por unidade de tempo por unidade de área. O fluxo é, portanto, medido em unidades tais como calorias por segundo por centímetro quadrado.

Vamos considerar somente casos em que a temperatura seja uma função de x e y , uma vez que o uso de funções analíticas e transformações conformes é limitado a esses casos. Como a temperatura T não varia com tempo, o escoamento de calor se acha num estado estacionário, e como T não varia com a coordenada perpendicular ao plano- xy , o escoamento é bidimensional, paralelo ao plano- xy .

Supõe-se que nenhuma energia térmica seja criada ou destruída no interior do sólido, isto é, que não haja a presença de fontes ou sorvedouros de calor no sólido. Assim, a função temperatura T e suas derivadas primeiras e segundas, são contínuas em todos os pontos interiores ao corpo. Esta afirmação e a fórmula (1) para o fluxo de calor por condução são postulados para a teoria matemática da condução térmica, postulados que também se aplicam em pontos interiores onde existe uma distribuição contínua de fontes.

Consideremos um elemento interior do sólido, elemento que tem a forma de um prisma de comprimento unitário perpendicular ao plano- xy , com base retangular Δx por Δy nesse plano (Fig. 52). A taxa de variação de escoamento de calor para a direita através da face esquerda é $-K \Delta y \frac{\partial T}{\partial x}$. Se K é constante, a diferença entre essa taxa e a taxa de variação do escoamento através da face direita é

$$(2) \quad -K \Delta y \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x,$$

que é a taxa resultante de perda de calor do elemento através dessas duas faces. As expressões aqui são aproximações cuja precisão aumenta quando Δx e Δy se tornam pequenos.

Analogamente, a taxa resultante de perda através das faces superior e inferior do elemento é

$$(3) \quad -K \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Delta y.$$

O calor entra no elemento ou sai dele somente através dessas quatro faces, e as temperaturas no interior do elemento são estacionárias. Logo, a soma das resultantes (2) e (3) é zero, isto é,

$$(4) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Como Δx e Δy podem ser tomados tão pequenos quanto se queira, temos uma breve demonstração de que a função temperatura deve satisfazer à equação de Laplace em cada ponto interior do sólido.

Em vista da equação (4) e da continuidade da função temperatura e das suas derivadas parciais, T é uma função harmônica de x e y no domínio representado pelo interior do corpo sólido.

As superfícies $T(x, y) = c$, onde c é uma constante qualquer, são as *isotermas*. Elas também podem ser consideradas como curvas no plano- xy , pois $T(x, y)$ pode ser interpretada como temperatura numa chapa delgada do material nesse plano, cujas faces são termicamente isoladas. As isotermas são as curvas de nível da função T . O gradiente de T é perpendicular à isotermas em cada ponto, e a corrente de calor, isto é, o fluxo máximo, ocorre na direção do gradiente. Se $S(x, y)$ é uma conjugada harmônica da função $T(x, y)$, então as curvas $S(x, y) = c$ têm os vetores gradiente como suas tangentes; essas curvas são as linhas de escoamento.

Se a derivada normal dT/dn é zero ao longo de uma parte da fronteira da chapa sólida, o fluxo de calor através dessa parte é zero. Isto é, a parte é termica-

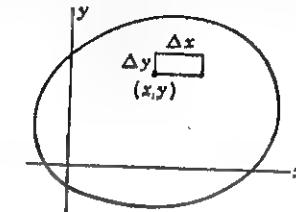


FIG. 52

mente isolada; ela é, portanto, uma linha de escoamento.

A função T também pode ser interpretada como a concentração de uma substância que se difunde através de um sólido. Neste caso, a constante K é a constante de difusão. A discussão e a dedução acima aplicam-se tanto à difusão no estado estacionário como à condução de calor.

83. Temperaturas Estacionárias numa Parede. Vamos determinar a fórmula para as temperaturas estacionárias $T(x, y)$, numa laje semi-infinita delimitada pelos planos $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$, e $y = 0$, quando as duas primeiras fronteiras são conservadas à temperatura zero e a última em temperatura $T = 1$ (Fig. 53). A função $T(x, y)$ deve ser limitada em todos os pontos dessa região, em particular, quando y tende para o infinito. Esta condição é natural se considerarmos a laje como limite de uma laje de altura finita, cuja fronteira superior é mantida a uma temperatura fixa quando a altura tende para o infinito.

O problema é também o de determinar as temperaturas numa placa tendo a forma de uma faixa semi-infinita, onde as faces são perfeitamente isoladas.

O problema de contorno a ser resolvido aqui pode ser escrito

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \right),$$

$$(2) \quad T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (y > 0),$$

$$(3) \quad T(x, 0) = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right);$$

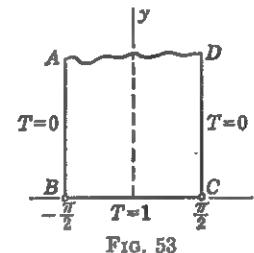


FIG. 53

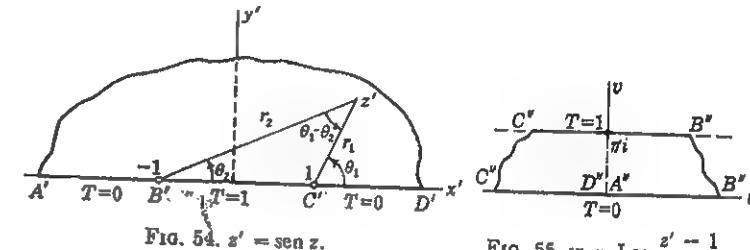
também $|T(x, y)| < M$, onde M é alguma constante, condição que poderia ser substituída pela de que T tenda para zero quando y tende para o infinito.

Este é um problema de Dirichlet para a faixa semi-infinita. De fato, as condições de contorno são todas do tipo $T = c$, tipo que é invariante sob transformações conformes (Sec. 81). Não é fácil descobrir uma função analítica cuja parte real ou imaginária satisfaça às condições de contorno (2) e (3). Vamos usar, portanto, transformações conformes para obtermos uma região e um problema suficientemente simples para que uma tal função se torne evidente.

A transformação $z' = \operatorname{sen} z$ transforma a faixa no semi-plano superior do plano- z' , como indicado na figura 9 do Apêndice 2. A imagem da base da faixa é o segmento do eixo- x' entre os pontos $z' = -1$ e $z' = 1$, e as imagens dos lados são as partes restantes do eixo- x' (Fig. 54). Vemos na figura 19, Apêndice 2, que este semiplano é transformado na faixa infinita entre as retas $v = 0$ e $v = \pi$ pela transformação

$$w = \operatorname{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \operatorname{Log} \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad (0 < \theta_1 < \pi, 0 < \theta_2 < \pi).$$

Como indicado nas figuras 54 e 55, o segmento do eixo- x' entre $z' = -1$ e $z' = 1$ é transformado na parte superior da faixa, e o resto do eixo na parte inferior.

FIG. 54. $z' = \operatorname{sen} z$.FIG. 55. $w = \operatorname{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1}$

Uma função harmônica de u e v , limitada na faixa, tal que se anula no lado $v = 0$ da faixa e é igual à unidade no lado $v = \pi$, é claramente

$$(4) \quad T = \frac{1}{\pi} v,$$

pois esta é a parte imaginária da função analítica $f(w) = w/\pi$. Mudando para as coordenadas x' e y' por meio da transformação

$$(5) \quad w = \operatorname{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \operatorname{Log} \left| \frac{z' - 1}{z' + 1} \right| + i \operatorname{arg} \frac{z' - 1}{z' + 1},$$

vemos que

$$v = \operatorname{arg} \left(\frac{x' - 1 + iy'}{x' + 1 + iy'} \right) = \operatorname{arg} \left[\frac{x'^2 + y'^2 - 1 + 2iy'}{(x' + 1)^2 + y'^2} \right],$$

$$\text{ou} \quad v = \operatorname{arctg} \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1} \right),$$

onde a função arcotangente toma os valores de 0 a π , pois

$$\operatorname{arg} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \theta_1 - \theta_2,$$

e os ângulos aqui são os indicados na figura 54.

A função T dada por (4) fica, portanto,

$$(6) \quad T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1} \right).$$

A função usada na transformação (5) é analítica no semiplano superior $y' > 0$. Como a função (4) é harmônica na faixa, a função (6) deve ser uma função harmônica no semiplano $y' > 0$. As condições de contorno para as duas funções devem ser as mesmas sobre as partes correspondentes das fronteiras. Pode-se verificar diretamente que a função (6) satisfaz à equação de Laplace e tende para os valores indicados na figura 54, quando o ponto se aproxima do eixo- x' por valores superiores.

A função representa as temperaturas estacionárias na placa semi-infinita $y' \geq 0$ com uma parte $(-1 < x' < 1)$ da sua fronteira $y' = 0$ mantida à temperatura $T = 1$ e o resto à temperatura zero. As isotermas $T = c$ ($0 < c < 1$) são os círculos

$$x'^2 + y'^2 - \frac{2}{\operatorname{tg} \pi c} y' - 1 = 0$$

com seus centros sobre o eixo- y' e passando pelos pontos $(\pm 1, 0)$.

Vamos determinar agora a solução do problema original, representado pelas condições (1) a (3). Sob a transformação

$$(7) \quad z' = \operatorname{sen} z,$$

a mudança de variáveis pode ser escrita

$$x' = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y, \quad y' = \cos x \operatorname{sh} y,$$

e a função harmônica (6) resulta

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y - 1} \right).$$

O denominador aqui reduz-se a $\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x$, e a fração pode ser escrita

$$\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} = \frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{1 - (\cos x / \operatorname{sh} y)^2} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

onde $\operatorname{tg} \alpha = \cos x / \operatorname{sh} y$. A nossa fórmula para T , portanto, fica

$$(8) \quad T = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y} \right).$$

A função arco tangente em (8) toma os valores de 0 a $\pi/2$, sendo seu argumento não negativo.

Como $\operatorname{sen} z$ é analítica, a transformação (7) faz com que a função (8) seja harmônica na faixa $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$, em que o semiplano é transformado, e satisfaça às condições de contorno (2) e (3). Além do mais, $|T(x, y)| \leq 1$ em toda a faixa. Logo, a fórmula (8) é a fórmula de temperatura procurada.

As isotermas $T = c$ são as curvas

$$\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2} \operatorname{sh} y,$$

cada uma das quais passa pelos pontos $(\pm \pi/2, 0)$. Se K é a condutividade térmica, o fluxo de calor para a parede através da sua base é

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2K}{\pi \cos x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right),$$

e o fluxo para fora através do plano $x = \pi/2$ é

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\pi/2} = \frac{2K}{\pi \operatorname{sh} y} \quad (y > 0).$$

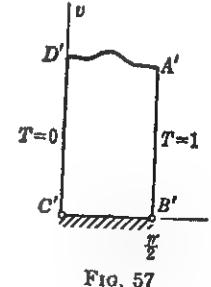
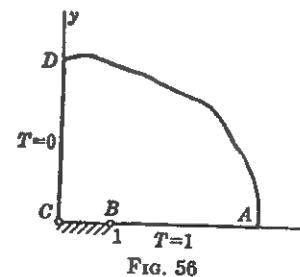
O produto de uma função harmônica por uma constante é também função harmônica. A função

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y} \right)$$

representa as temperaturas estacionárias na laje acima, quando a base é mantida à temperatura T_0 e os lados à temperatura zero.

O problema de contorno dado pelas condições (1) a (3), também pode ser resolvido com o auxílio de séries de Fourier. Esse método é mais direto, dando a solução, porém, na forma de uma série infinita.¹

84. Temperaturas num Quadrante com Parte de Uma Fronteira Isolada. Vamos determinar as temperaturas estacionárias numa placa com a forma de um quadrante, se um segmento no fim de uma margem é isolado, se o resto dessa margem é mantido a uma temperatura fixa, e se a segunda margem é mantida a uma outra temperatura fixa. As faces são isoladas de modo que o problema é bidimensional.



¹Ver, por exemplo, o livro do autor "Fourier Series and Boundary Value Problems," probl. 8 e 9, p. 116, 1941. Também, um pequeno tratamento da unicidade das soluções de problemas de contorno será encontrado no cap. 7 do mesmo livro.

A escala de temperatura e a unidade de comprimento podem ser escolhidas de tal modo que o problema de contorno na função temperatura T resulte

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0);$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (0 < x < 1);$$

$$(3) \quad \begin{aligned} T(x, 0) &= 1 & (x > 1); \\ T(0, y) &= 0 & (y > 0), \end{aligned}$$

onde $T(x, y)$ é limitada para todos os x e y positivos. A placa e as condições de contorno são indicadas na figura 56.

As condições (2) prescrevem o valor da derivada normal da função T sobre uma parte de uma linha de fronteira, e o valor da própria função sobre o resto dessa linha. O método de Fourier acima mencionado, que exigiria o emprego de uma integral de Fourier neste caso, não é adaptável a problemas com tipos diferentes de condições sobre uma mesma linha de fronteira.

De acordo com a figura 10 do Apêndice 2, a transformação

$$(4) \quad z = \operatorname{sen} w$$

leva o quadrante $x \geq 0, y \geq 0$ na faixa $0 \leq u \leq \pi/2, v \geq 0$. O segmento isolado do eixo- x é transformado na base da faixa e o resto da fronteira nos lados da faixa, como mostra a figura 57. As condições de contorno correspondentes para a função T de u e v são indicadas na mesma figura. A função limitada T aqui é obviamente

$$(5) \quad T = \frac{2}{\pi} u = \Re \left(\frac{2}{\pi} w \right),$$

pois esta é uma função harmônica de u e v tal que $T = 0$, quando $u = 0$, $T = 1$ quando $u = \pi/2$; também $\partial T / \partial v = 0$ em todos os pontos, ao longo do eixo- u em particular. A função temperatura procurada para o quadrante é obtida escrevendo-se T em termos de x e y .

A fim de obtermos u em termos de x e y , notemos primeiro, de acordo com (4), que

$$(6) \quad x = \operatorname{sen} u \operatorname{ch} v, \quad y = \cos u \operatorname{sh} v;$$

portanto,

$$(7) \quad \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1.$$

Ao resolver em relação a u , convém observar que, para cada u fixado, o ponto (x, y) , que pertence ao primeiro quadrante, está sobre a hipérbole (7) com focos nos pontos $(\pm 1, 0)$ e com eixo transverso de comprimento $2 \operatorname{sen} u$. A diferença de suas distâncias dos focos é portanto $2 \operatorname{sen} u$,

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \operatorname{sen} u.$$

De acordo com a fórmula (5), a função temperatura procurada é

$$(8) \quad T = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}],$$

onde a função arco seno toma os valores de 0 a $\pi/2$, campo de variação de u . Se quisermos verificar que esta função satisfaz às condições de contorno (2), devemos lembrar-nos de que as raízes quadradas aqui são positivas, de modo que $\sqrt{(x-1)^2}$ significa $x-1$ quando $x > 1$ e $1-x$ quando $x < 1$.

Pode-se ver de (5) que as isotermas $T = c$ são as partes das hipérboles confocais (7), onde $u = nc/2$, as quais se situam no primeiro quadrante. As linhas de escoamento são quartas partes das elipses confocais obtidas a partir das equações (6) mantendo-se v constante, uma vez que a função $2v/\pi$ é uma conjugada harmônica da função (5). A temperatura ao longo da parte isolada da margem inferior é

$$T(x, 0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} x.$$

EXERCÍCIOS

1. Para a condução de calor na placa semi-infinita indicada na figura 54, note a conjugada harmônica da função temperatura $T(x', y')$ a partir da equação (5), Sec. 83, e determine as linhas de escoamento de calor. Mostre que essas linhas consistem da semi-reta superior do eixo- y' e dos semicírculos superiores de alguns círculos, que ficam num dos lados do eixo- y' , com centros no segmento $A'B'$ ou $C'D'$ do eixo- x' .
2. Na ausência da exigência de que a função T na seção 83 fosse limitada, mostre que a função harmônica (4) dessa seção poderia ser substituída pela função harmônica

$$T_1 = \mathcal{G} \left(\frac{1}{\pi} w + A \operatorname{ch} w \right) = \frac{1}{\pi} v + A \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v,$$

onde A é uma constante real arbitrária; assim, a solução do problema de Dirichlet para a faixa (Fig. 55) não é única.

3. Suponha que a condição $|T(x, y)| < M$ fosse omitida do problema de contorno de temperaturas numa laje semi-infinita (Sec. 83, Fig. 53). Mostre que, neste caso, existiriam infinitas soluções. Sugestão: Note o efeito de somar à solução encontrada a parte imaginária da função $A \operatorname{sen} z$, onde A é uma constante real arbitrária.

4. Use a função $\operatorname{Log} z$ para obter uma fórmula para as temperaturas estacionárias limitadas numa placa com a forma de um quadrante $x \geq 0, y \geq 0$, se suas faces planas são perfeitamente isoladas e suas margens são mantidas às temperaturas $T(x, 0) = 0$ e $T(0, y) = 1$ (Fig. 58). Determine as isotermas e linhas de escoamento e desenhe algumas delas.

Resp. $T = (2/\pi) \operatorname{arctg}(y/x)$.

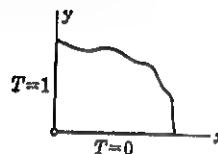


FIG. 58

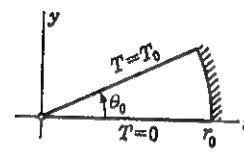


FIG. 59

5. Determine as temperaturas estacionárias num sólido na forma de uma cunha longa e cilíndrica se os planos de fronteira $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são mantidos às temperaturas constantes 0 e T_0 , respectivamente, e se sua superfície $r = r_0$ é perfeitamente isolada (Fig. 59).
Resp. $T = (T_0/\theta_0) \operatorname{arctg}(y/x)$.

6. Determine as temperaturas estacionárias limitadas $T(x, y)$ no sólido semi-infinito $y \geq 0$, se $T = 0$ sobre a parte $x < -1$ da fronteira e $T = 1$ sobre a parte $x > 1$, e se a faixa $-1 < x < 1$ da fronteira é isolada (Fig. 60).

$$\text{Resp. } T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen} t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

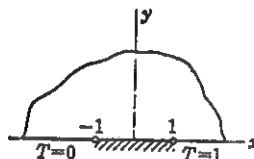


FIG. 60

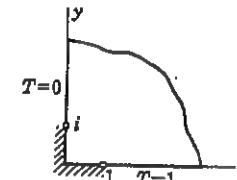


FIG. 61

7. Determine as temperaturas estacionárias limitadas num quadrante quando os planos de fronteira são mantidos a temperaturas fixas, exceto para faixas isoladas de igual largura no canto, como mostra a figura 61.

$$\text{Resp. } T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} [\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen} t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

8. Resolva o seguinte problema de Dirichlet para a faixa semi-infinita (Fig. 62):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0),$$

$$H(0, y) = 1, \quad H\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad H(x, 0) = 0, \quad 0 \leq H(x, y) \leq 1.$$

$$\text{Resp. } H = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tgh} y}{\operatorname{tgh} x} \right).$$

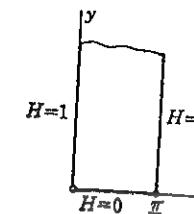


FIG. 62

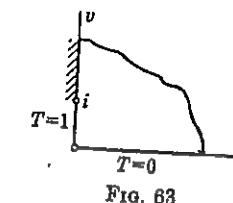


FIG. 63

9. Deduza uma fórmula para as temperaturas $T(r, \theta)$ num semidisco $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ com faces planas isoladas, se $T = 1$ ao longo da margem radial $\theta = 0$ e $T = 0$ no resto da fronteira. (Este problema pode ser transformado no problema do exercício 8.) Verifique que sua função satisfaz a todas as três condições de contorno.

10. Aplique a transformação $w = i/z$ ao problema sobre temperaturas num quadrante resolvido na secção 84 (Fig. 56). Enuncie o novo problema sobre temperaturas num quadrante do plano-uv e escreva a fórmula de temperatura (veja a figura 63). Use, a seguir, a transformação $w = \operatorname{sen} z'$ nesse novo problema e enuncie o problema resultante sobre temperaturas numa faixa semi-infinita no plano-z'.

11. A parte $x < 0$ de cada um dos dois planos de fronteira de uma laje infinita $0 \leq y \leq \pi$ é termicamente isolada. Sobre as partes $x > 0$ mantêm-se as condições $T(x, 0) = 1$ e $T(x, \pi) = 0$. (Fig. 64). Determine as temperaturas estacionárias $T(x, y)$ na laje. (Este problema pode ser transformado no problema do exercício 6.)

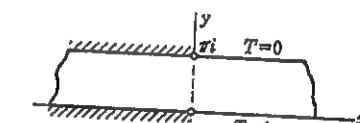


FIG. 64

12. Na secção 54 e no exercício 11, Sec. 55, mostrou-se que uma função u que é harmônica num domínio D , deve tomar seus valores máximo e mínimo na fronteira de D , e nunca num ponto interior. Interpretando $u(x, y)$ como temperatura estacionária, dê uma razão física pela qual essa propriedade de máximo e mínimo deve ser verdadeira.

85. Potencial Elétrico. A intensidade de um campo de força elétrico num ponto, é a força elétrica que seria exercida sobre uma unidade de carga positiva localizada no ponto. O *potencial eletrostático* é uma função das coordenadas de um ponto, cuja derivada direcional em cada direção é o oposto do componente da intensidade do campo elétrico nessa direção.

A força elétrica de atração ou repulsão entre duas partículas carregadas estacionárias no espaço é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, e diretamente proporcional ao produto de suas cargas. Partindo-se desta lei de quadrado-inverso para a força, pode-se ver que o potencial devido a uma só partícula no espaço é inversamente proporcional à primeira potência da distância do ponto à partícula. O potencial devido a uma distribuição de cargas, em pontos de uma região livre de cargas elétricas, satisfaz, como se pode mostrar, à equação de Laplace na região tridimensional

Quando as condições são tais que o potencial V é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano-xy, então, em regiões livres de cargas, V é uma função harmônica das duas variáveis x e y :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

A intensidade do campo elétrico em cada ponto é então um vetor paralelo ao plano $-xy$ com componentes $-\partial V/\partial x$, e $-\partial V/\partial y$ paralelos aos eixos de coordenadas. Assim a intensidade do campo elétrico é representada por um vetor que é o oposto do gradiente de V .

Uma superfície sobre a qual V é constante, é uma superfície equipotencial. A força tangente a uma superfície condutora é zero no caso estático, pois as cargas se movem livremente sobre tal superfície sob a ação da força elétrica. Assim, V é constante sobre a superfície de um condutor e essa superfície é equipotencial.

Se $U(x, y)$ é uma conjugada harmônica de $V(x, y)$, as curvas $U = c$ no plano xy são chamadas *linhas de fluxo*. Estas curvas são ortogonais às superfícies ou curvas equipotenciais. A intensidade de campo elétrico tem a direção da linha de fluxo em cada ponto.

Como no caso de temperaturas estacionárias, os métodos de variáveis complexas são limitados a problemas no potencial bidimensional $V(x, y)$, chamado às vezes de *potencial logarítmico*. Tais problemas podem originar-se de uma distribuição de cargas que é uniforme ao longo de toda reta perpendicular ao plano-xy. A força elétrica num ponto devida a uma só reta uniformemente carregada é, como se pode ver, inversamente proporcional à primeira potência da distância do ponto à reta.

Problemas de contorno do potencial V são os mesmos problemas matemáticos que os de temperaturas estacionárias T . De fato, a temperatura é o potencial para escoamento de calor por condução.

O problema na secção 83 (Fig. 53), por exemplo, pode ser visto como o de determinar o potencial eletrostático bidimensional no espaço vazio limitado pelos planos condutores $x = \pm \pi/2$ e $y = 0$, isolados nas suas intersecções, quando os planos nos lados são mantidos ao potencial zero e a base ao potencial $V = 1$. Problemas deste tipo aparecem na eletrônica. Se a carga espacial no interior de um tubo de vácuo é pequena, o espaço é às vezes considerado como sendo livre de cargas, por aproximação; pode-se, então, admitir que o potencial satisfaça à equação de Laplace.

O potencial no escoamento estacionário de eletricidade numa chapa plana condutora também é uma função harmônica nos pontos livres de fontes e sorvedouros. Potencial magnético e potencial gravitacional são outros exemplos de funções harmônicas na física.

86. Potencial num Espaço Cilíndrico. Um cilindro circular longo é feito de uma chapa delgada de material condutor, e o cilindro é dividido ao longo de suas geratizes em duas partes iguais. Essas partes são separadas por faixas estreitas de material isolante e usadas como eletrodos, um dos quais é ligado à terra e o outro mantido a um certo potencial fixo. Tomamos os eixos de coordenadas, as unidades de comprimento e a diferença de potencial tais como indicados na figura 65. O potencial eletrostático $V(x, y)$ sobre qualquer secção transversal do espaço envolto,

que é distante das extremidades do cilindro, é uma função harmônica no interior do círculo $x^2 + y^2 = 1$; também $V = 0$ sobre o semicírculo superior e $V = 1$ sobre o inferior.

No exercício 10, Sec. 35 consideramos uma transformação linear fracionária que transforma o interior do círculo unitário no semiplano superior, o semicírculo superior no eixo real positivo e o semicírculo inferior no eixo real negativo. O resultado é dado na figura 13 do Apêndice 2. Vamos trocar w por z na fórmula nessa figura para escrevermos a transformação como

$$(1) \quad z = \frac{i-w}{i+w}$$

Sob esta transformação o novo problema para V no semiplano é o indicado na figura 66 abaixo.

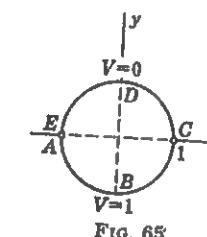


Fig.

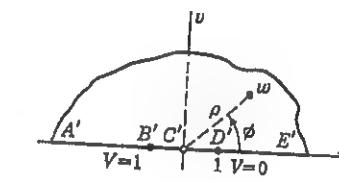


FIG.

O problema de determinar o potencial V neste semiplano pode ser reduzido a um problema ainda mais simples pela transformação $w = \exp z$. Mas a segunda transformação é desnecessária se observarmos que a parte imaginária da função

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \log w = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \rho + \frac{i}{\pi} \phi \quad (0 \leq \phi \leq \pi).$$

é uma função limitada de u e v que toma os valores exigidos sobre as duas partes $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ do eixo- u . A função harmônica procurada para o semiplano é portanto,

$$(3) \quad V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{v}{\mu}$$

A equação (1) pode ser escrita na forma

$$(4) \quad w = i \frac{1-z}{1+z}$$

onde se vê que u e v são funções de x e y . A função (3), então, fica

$$(5) \quad V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right),$$

onde $0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi$ e portanto

$$\lim_{t \rightarrow +0} \operatorname{arctg} t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -0} \operatorname{arctg} t = \pi.$$

A função (5) é a função potencial para o espaço envolto pelos eletrodos cilíndricos, pois deve ser harmônica no círculo e tomar os valores exigidos sobre os semicírculos que são as imagens das semi-retas $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ no plano w . Uma verificação direta de todas as condições a partir da fórmula (5) não é difícil.

Os equipotenciais $V = c$ na região circular são arcos dos círculos

$$x^2 + y^2 + 2y \operatorname{tg} \pi c = 1,$$

cada um dos quais passa pelos pontos $(\pm 1, 0)$. Também, o segmento do eixo x entre esses pontos é o equipotencial $V = 1/2$. A conjugada harmônica U de V é $(1/\pi) \operatorname{Log} \rho$, em vista da fórmula (2). De acordo com a equação (4),

$$U = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{|1 - z|}{|1 + z|}.$$

Desta equação pode-se ver que as linhas de fluxo $U = c$ são arcos de círculos com centros sobre o eixo x . O segmento do eixo y entre os eletrodos também é uma linha de fluxo.

EXERCÍCIOS

- A função harmônica (3) da seção 86 é limitada no semi-plano $v \geq 0$ e satisfaz às condições de contorno indicadas na figura 66. Mostre que se a parte imaginária de Ae^{Wv} é adicionada a essa função, onde A é uma constante real qualquer, a função resultante satisfaz a todas as condições, exceto a de limitação. Mostre também que a função resultante se transforma, sob a equação (4), Sec. 86, numa função de x e y que não é limitada numa vizinhança do ponto $z = -1$, ponto sobre o círculo na figura 65 onde V é descontínua.
- Mostre que a transformação (1) da seção 86 transforma o semidisco da região circular ilustrada na figura 65 no primeiro quadrante do plano w e o diâmetro CE no eixo v positivo. Determine, então, o potencial eletrostático V no espaço delimitado pela parte superior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelo plano $y = 0$, quando $V = 0$ sobre a superfície cilíndrica e $V = 1$ sobre a superfície plana (Fig. 67).

$$\text{Resp. } V = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right).$$

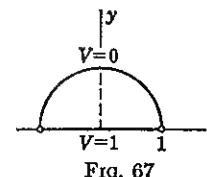


FIG. 67

- Determine o potencial eletrostático $V(r, \theta)$ no espaço delimitado pelos semiplanos $\theta = 0$ e $\theta = \pi/4$ e pela porção $0 < \theta < \pi/4$ da superfície cilíndrica $r = 1$, quando $V = 1$ sobre as fronteiras planas e $V = 0$ sobre a fronteira cilíndrica (ver o exercício 2). Verifique que sua função satisfaz às condições de contorno.
- Note que todos os ramos de $\operatorname{Log} z$ tem a mesma parte real, que é harmônica em todos os pontos, exceto na origem. Escreva, então, uma fórmula para o potencial eletrostático $V(x, y)$ no espaço entre duas superfícies cilíndricas condutoras $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = r_0^2$ se $V = 0$ sobre a primeira superfície e $V = 1$ sobre a segunda.

$$\text{Resp. } V = \frac{\operatorname{Log} (x^2 + y^2)}{2 \operatorname{Log} r_0}.$$

- Determine o potencial eletrostático limitado $V(x, y)$ no espaço acima de um plano infinito condutor $y = 0$, uma faixa $(-a < x < a)$ do qual é isolada do resto e mantida ao potencial $V = 1$, enquanto que $V = 0$ sobre o resto, como indica a figura 68. Verifique que sua função satisfaz às condições de contorno.

$$\text{Resp. } V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad (0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi).$$

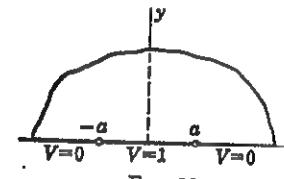


FIG. 68

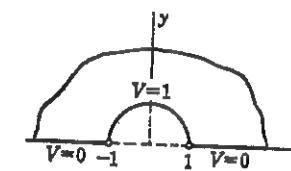


FIG. 69

- Deduza uma fórmula para o potencial eletrostático no espaço ilustrado na figura 69, delimitada abaixo por dois semiplanos e metade de um cilindro, se $V = 1$ sobre o cilindro e $V = 0$ sobre os planos. Esboce algumas das linhas equipotenciais.

$$\text{Resp. } V = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right).$$

- Determine o potencial V no espaço entre os planos $y = 0$ e $y = \pi$ se $V = 0$ sobre a parte $x > 0$ de cada um dos planos e $V = 1$ sobre as partes $x < 0$ (Fig. 70). Verifique seu resultado quanto às condições de contorno.

$$\text{Resp. } V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sh} x} \right) \quad (0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi).$$

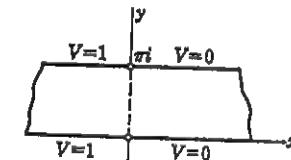


FIG. 70

- Deduza uma fórmula para o potencial eletrostático V no espaço interior a um cilindro longo $r = 1$ se $V = 0$ sobre o quadrante $0 < \theta < \pi/2$ da superfície cilíndrica, e $V = 1$ sobre o resto ($\pi/2 < \theta < \pi/2$) dessa superfície (ver a figura 21 e o exercício 12, Sec. 35). Mostre que $V = 3/4$ sobre o eixo do cilindro. Verifique seu resultado quanto às condições de contorno.
- Determine as temperaturas estacionárias T numa placa da forma de um segmento de círculo (região ABC na figura 20, Apêndice 2) com suas faces isoladas, quando $T = 0$ sobre a margem circular ABC e $T = 1$ sobre a base DEF . Verifique se sua fórmula está de acordo com condições de contorno.

10. O problema de Dirichlet

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b),$$

$$V(0, y) = V(a, y) = V(x, 0) = 0, \quad V(x, b) = 1$$

para $V(x, y)$ num retângulo (Fig. 71) pode ser resolvido com o auxílio das séries de Fourier para função seno.¹ A solução é

$$V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(m\pi y/a)}{m \operatorname{sh}(m\pi b/a)} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 2n - 1).$$

Aceitando esta fórmula como correta, determine o potencial $V(r, \theta)$ no espaço $1 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, se $V = 1$ sobre a fronteira $\theta = \pi$ e $V = 0$ sobre o resto da fronteira (Fig. 72).

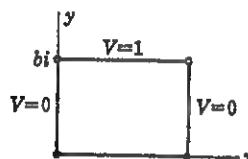


FIG. 71

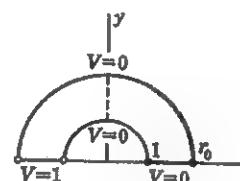


FIG. 72

$$\text{Resp. } V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} N\theta}{\operatorname{sh} N\pi} \frac{\operatorname{sen}(N \operatorname{Log} r)}{2n-1} \quad [N = \frac{(2n-1)\pi}{\operatorname{Log} r_0}].$$

11. Com o auxílio da fórmula para $V(x, y)$ num retângulo, dada no exercício 10, determine a função potencial $V(r, \theta)$ para a região $1 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, se $V = 1$ sobre a fronteira $r = r_0$ e $V = 0$ sobre o resto da fronteira (Fig. 73).

$$\text{Resp. } V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^m - r_0^{-m}}{r_0^m - r_0^{-m}} \frac{\operatorname{sen} m\theta}{m} \quad (m = 2n - 1).$$

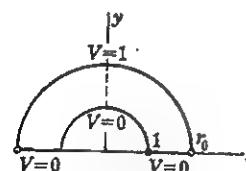


FIG. 73

12. Uma placa com faces isoladas tem a forma da semi-ellipse ilustrada na figura 11 do Apêndice 2. A temperatura da parte elíptica da sua fronteira é $T = 1$; $T = 0$ sobre o segmento $-1 < x < 1$ da sua base; o resto da base é isolado. Determine as linhas de escoamento de calor no estado estacionário.

¹Veja o livro do autor "Fourier Series and Boundary Value Problems", p. 114, 1941.

87. Escoamento de Fluido Bidimensional. As funções harmônicas desempenham um importante papel na hidrodinâmica e aerodinâmica. Novamente aqui, consideramos somente o escoamento bidimensional no estado estacionário. Isto é, o movimento do fluido é suposto o mesmo em todos os planos paralelos ao plano- xy , sendo a velocidade paralela a esse plano e independente do tempo. É suficiente, então, considerar o movimento do fluido no plano- xy .

Suponhamos que o vetor que representa a variável complexa

$$q = q_1 + iq_2$$

designe a velocidade de uma partícula do fluido num ponto qualquer (x, y) , de modo que as componentes x e y da velocidade têm os valores $q_1(x, y)$ e $q_2(x, y)$. Nos pontos interiores de um domínio de escoamento em que não existem fontes ou sorvedouros do fluido, as funções reais q_1 e q_2 e suas derivadas parciais de primeira ordem são supostas contínuas. Seja C um caminho e seja q_t a componente da velocidade q tangente a C (q_t é uma função real). Se s é o comprimento de arco ao longo de C , o valor da integral de linha

$$(1) \quad \int_C q_t(x, y) \, ds$$

é chamado *circulação* do fluido ao longo de C . Quando a circulação é dividida pelo comprimento da curva, o quociente representa uma velocidade média do fluido ao longo da curva.

Suponhamos que C seja um caminho fechado interior a um domínio simplesmente conexo, onde q_1 , q_2 e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas. Se $x + iy$ designa pontos de C , o número complexo $dx + idy$ representa um vetor tangente a C cujo comprimento é ds . Ora, $q_t ds$ é o produto dos comprimentos dos vetores q e $dx + idy$ pelo cosseno do ângulo entre eles, isto é, $q_t ds$ é o produto escalar desses dois vetores;

$$q_t ds = q_1 dx + q_2 dy.$$

Com o auxílio do teorema de Green, a circulação ao longo de C pode ser escrita

$$(2) \quad \int_C (q_1 dx + q_2 dy) = \iint_R \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde R é a região delimitada por C .

Para uma interpretação física do integrando da última integral, seja C um círculo $|z - z_0| = r_0$. A velocidade média v_0 ao longo de C é então determinada dividindo-se a circulação por $2\pi r_0$, e a velocidade angular média ω_0 do fluido em torno do eixo do círculo é v_0/r_0 ; assim,

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

O segundo membro representa o valor médio da função

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right)$$

sobre a região circular R . Seu limite quando r_0 tende para zero é o valor de ω no ponto z_0 . Logo, a função $\omega(x, y)$, chamada *rotação* do fluido, representa o limite da velocidade angular de um elemento circular do fluido quando o círculo se contrai para o ponto (x, y) .

Se $\omega = 0$ em todos os pontos de um domínio, o escoamento é *irrotacional* nesse domínio. Consideramos somente escoamentos irrotacionais. Admitimos também que o fluido é *incompressível* e *não-viscoso*.

Seja D um domínio simplesmente conexo onde o escoamento é irrotacional. Se C é um caminho fechado qualquer em D , segue-se da fórmula (2) que a circulação ao longo de C é zero,

$$\int_C (q_1 dx + q_2 dy) = 0.$$

Como consequência, se (x_0, y_0) é um ponto fixado em D , a equação

$$(4) \quad \phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [q_1(x', y') dx' + q_2(x', y') dy']$$

define uma função do ponto (x, y) em D , que é independente do caminho de integração entre os limites, desde que o caminho seja interior a D , pois a integral ao longo de um caminho C_1 (Fig. 74) menos a integral ao longo de um outro caminho C_2 é a integral ao longo de um caminho fechado C , que deve ser igual a zero.

Como a integral de linha (4) é independente do caminho, segue-se que o seu integrando é uma diferencial exata, diferencial da função $\phi(x, y)$. Logo,

$$(5) \quad q_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y};$$

isto é, o vetor q é o gradiente de ϕ ,

$$(6) \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

e a derivada direcional de ϕ em qualquer direção representa a componente da velocidade do fluido nessa direção.

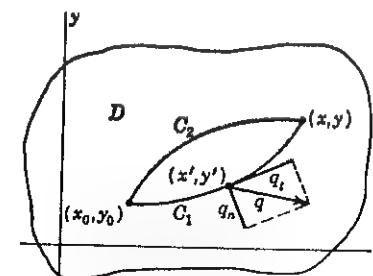


Fig. 74

A função $\phi(x, y)$ é chamada *potencial de velocidade*. Segue-se da fórmula (4) que $\phi(x, y)$ varia de uma constante aditiva quando se muda o ponto de referência z_0 .

As curvas $\phi(x, y) = c$ são *equipotenciais*. Elas são as curvas de nível da função ϕ . Os vetores velocidade em todos os pontos são normais a essas curvas visto que q é o gradiente de ϕ .

Exatamente como no caso do escoamento de calor, a condição de continuidade do escoamento estacionário, isto é, a condição de que o fluido incompressível entre em, ou deixa, um elemento de volume do domínio somente através das fronteiras do elemento, exige que ϕ satisfaça à equação de Laplace

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

num domínio que seja livre de fontes ou sorvedouros do fluido. Em vista das equações (5) e da continuidade de q_1, q_2 e suas derivadas parciais, as derivadas parciais de ϕ até a segunda ordem são contínuas num tal domínio; assim, o potencial de velocidade ϕ é uma função harmônica no domínio.

88. A Função Corrente. Se $\psi(x, y)$ é uma conjugada harmônica da função $\phi(x, y)$, então os vetores velocidade são tangentes às curvas

$$(1) \quad \psi(x, y) = c.$$

Estas curvas são chamadas *linhas de corrente* do escoamento; a função ψ é a *função corrente*. Em particular, uma fronteira através da qual o fluido não pode escoar é uma linha de corrente de escoamento para fluidos não viscosos.

A função analítica

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

é o *potencial complexo* do escoamento. Ora,

$$F'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

pois ϕ e ψ satisfazem às condições de Cauchy-Riemann. Em vista da fórmula (6), Sec. 87, segue-se que o conjugado da derivada do potencial complexo é a velocidade,

$$(2) \quad q = \overline{F'(z)}.$$

O módulo da velocidade é dado pela fórmula

$$(3) \quad |q| = |F'(z)|.$$

De acordo com a equação (3), Sec. 78, se ϕ é harmônica num domínio simplesmente conexo D , então uma conjugada harmônica, definida em D , de ϕ pode ser escrita

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial \phi(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial \phi(x', y')}{\partial x'} dy' \right].$$

Em vista das equações (5) da secção 87, então

$$(4) \quad \psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [-q_2(x', y') dx' + q_1(x', y') dy'].$$

O caminho de integração é qualquer contorno C_1 interior a D , ligando os dois pontos (Fig. 74).

A fórmula (4) nos permite uma interpretação física da função corrente. Como o fluido é incompressível, sua densidade é uniforme, e o volume ocupado por qualquer parte tem uma relação constante com a massa nessa parte. O integrando na fórmula (4) é o produto escalar dos vetores q e $-idz'$, onde

$$dz' = dx' + i dy';$$

também, $-idz'$ é o vetor de comprimento ds obtido pela rotação do vetor tangente dz' do ângulo $-\pi/2$. O integrando é, portanto, o produto dos comprimentos de q e $-idz'$ pelo co-seno do ângulo entre esses vetores, ou $q_n ds$, onde q_n é a componente de q normal a C_1 . Assim, a fórmula (4) pode ser escrita

$$(5) \quad \psi(x, y) = \int_{C_1} q_n(x', y') ds.$$

Fisicamente, então, $\psi(x, y)$ representa a taxa de escoamento do fluido através da curva C_1 de (x_0, y_0) a (x, y) ; mais precisamente, ela é a taxa de escoamento, por volume, através de um cilindro de altura-unidade situado perpendicularmente ao plano- xy sobre a curva C_1 .

Quando o ponto (x, y) está sobre a linha de corrente por (x_0, y_0) , então

$$\psi(x, y) = 0.$$

Como ϕ e ψ são funções harmônicas, as propriedades estabelecidas nas secções 80 e 81 sob transformações $z = f(w)$, onde f é analítica, são válidas para essas funções. Assim, elas se transformam em funções harmônicas de u e v , as quais podem ser interpretadas como potencial de velocidade e função corrente para um escoamento na nova região. Uma linha de corrente, ou fronteira natural $\psi = c$ num plano é transformada numa linha de corrente ou fronteira natural $\psi = c$ no outro.

Sob nossas hipóteses de escoamento estacionário e irrotacional de fluido com

densidade uniforme ρ , pode-se mostrar que a pressão do fluido $p(x, y)$ satisfaz ao seguinte caso particular da equação de Bernoulli:¹

$$(6) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |q|^2 + V = \text{constante}.$$

Aqui V é a função potencial para qualquer campo de forças, tal como gravidade, que atue sobre o fluido, independentemente de seu escoamento. Supomos V constante. hipótese que se verifica em muitos casos. Então a pressão é máxima onde o módulo da velocidade $|q|$ é mínimo.

89. Escoamento ao redor de um Canto. Quando o potencial complexo é a função

$$(1) \quad F(z) = Az,$$

onde A é uma constante real positiva, então

$$(2) \quad \phi(x, y) = Ax, \quad \psi(x, y) = Ay.$$

As linhas de corrente $\psi = c$ são as retas horizontais $y = c/A$, e a velocidade do fluido é o vetor

$$q = \overline{F'(z)} = A.$$

Aqui o ponto (x_0, y_0) onde $\psi = 0$ é qualquer ponto sobre o eixo- x . Se tal ponto é a origem, então $\psi(x, y)$ é a taxa de escoamento através de um caminho traçado da origem ao ponto (x, y) (Fig. 75). O escoamento é um escoamento uniforme para a direita. Pode ser interpretado como escoamento uniforme no

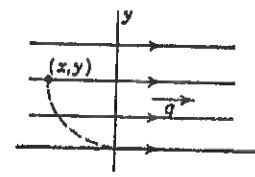


FIG. 75

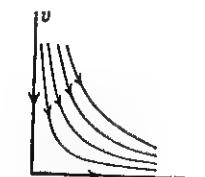


FIG. 76

semiplano superior limitado pelo eixo- x , ou como escoamento uniforme entre duas retas paralelas $y = y_1$ e $y = y_2$.

Para determinar o escoamento num quadrante $u \geq 0, v \geq 0$, observamos que a fronteira é transformada em todo o eixo- x pela transformação

¹ Veja, por exemplo, H. Lamb, "Hydrodynamics", pp. 21ff., 1945; ou A. M. Kuether e J. D. Shetzer, "Foundations of Aerodynamics", p. 55, 1959.

$$(3) \quad z = w^2 = u^2 - v^2 + 2uv,$$

e o quadrante é levado no semiplano superior do plano- xy . A função corrente $\psi = Ay$ para o escoamento no semiplano transforma-se na função corrente para

$$(4) \quad \psi = 2Auw$$

o escoamento no quadrante. Isto é, esta função ψ deve ser harmônica no quadrante e reduzir-se a zero sobre as fronteiras.

As linhas de corrente $\psi = c$ no quadrante são ramos das hipérboles retangulares (Fig. 76)

$$2Auv = c$$

O potencial complexo é a função $F = Aw^2$, e a velocidade do fluido é

$$q = \overline{F'(w)} = 2A(u - iv).$$

O módulo

$$|q| = 2A \sqrt{u^2 + v^2}$$

é diretamente proporcional à distância da partícula à origem. O valor da função corrente (4) pode ser interpretado aqui como a taxa de escoamento através de um segmento retilíneo, que se estende da origem ao ponto (u, v) .

Em tais problemas é mais simples escrever primeiro o potencial complexo como função da variável complexa na nova região. A função corrente e a velocidade podem então ser obtidas a partir dessa função potencial.

A função ψ caracteriza um escoamento definido na região. A questão da unicidade, se existe uma única função correspondente a uma dada região a menos de um fator constante ou de uma constante aditiva, não pode ser examinada adequadamente aqui. Em alguns dos exemplos que seguem, nos quais a velocidade é uniforme e sem obstrução, ou no capítulo 10, onde estão em jogo fontes e sorvedouros, a situação física indica que o escoamento é determinado de modo único pelas condições dadas no problema.

Pode-se notar que uma função harmônica nem sempre é determinada de modo único, mesmo a menos de um fator constante, pelos valores prescritos sobre a fronteira de uma região. Observamos acima, por exemplo, que $\psi = Ay$ é harmônica no semiplano $y \geq 0$ e se anula sobre a fronteira. A função $\psi_1 = Be^y \sin y$ também satisfaz a essas condições. A linha de corrente $\psi_1 = 0$, entretanto, consiste não só da reta $y = 0$ como também das retas $y = n\pi$, interiores à região. Aqui a função $F_1 = Be^z$ é o potencial complexo para o escoamento na faixa entre as retas $y = 0$ e $y = \pi$, cujas fronteiras fazem ambas parte da linha de corrente $\psi_1 = 0$; o fluido escoa para a direita ao longo da fronteira inferior e para a esquerda ao longo da superior, se $B > 0$.

90. Escoamento ao redor de um Cilindro. Suponhamos que um longo cilindro circular de raio unitário se situe num grande corpo de fluido, escoando com uma velocidade uniforme, com seu eixo perpendicular à direção de escoamento. Para determinar o escoamento estacionário ao redor do cilindro, podemos representá-lo pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$ e supor que o escoamento suficientemente distante do círculo seja paralelo ao eixo- x (Fig. 77). A simetria mostra que a parte do eixo- x exterior ao círculo pode ser tratada como fronteira, de modo que precisamos considerar somente a parte superior da figura como região de escoamento.

A fronteira desta região de escoamento, consistindo do semicírculo superior e das duas partes do eixo- x , é transformada em todo o eixo- u pela transformação

$$(1) \quad w = z + \frac{1}{z}.$$

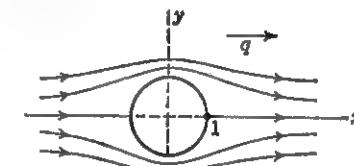


Fig. 77

A região é transformada no semiplano $v \geq 0$ (Fig. 17, Apêndice 2). O potencial complexo para um escoamento uniforme no semiplano é

$$F = Aw,$$

onde A é uma constante real. Logo, o potencial complexo para a região ao redor do círculo é

$$(2) \quad F = A \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

A velocidade

$$(3) \quad q = A \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

tende para A quando $|z|$ cresce; isto é, o escoamento é quase uniforme e paralelo ao eixo- x em pontos distantes do círculo. Este resultado também decorre do fato de que a derivada da função transformadora (1) tende para a unidade quando $|z|$ cresce, e, portanto, direções e comprimentos são apenas ligeiramente alterados pela transformação em pontos distantes da origem $z = 0$ (Secs. 75 e 76).

Da fórmula (3) vemos que $q(\bar{z}) = \overline{q(z)}$; logo a fórmula também representa velocidades de escoamento na região inferior, com o semicírculo inferior como uma linha de corrente.

De acordo com a fórmula para F , a função corrente é, em coordenadas polares,

$$(4) \quad \psi = A \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta.$$

As linhas de corrente

$$A \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = c$$

são simétricas em relação ao eixo- y e têm assíntotas paralelas ao eixo- x . Note que quando $c = 0$ a linha de corrente consiste do círculo e eixo- x .

EXERCÍCIOS¹

1. Diga por que as componentes da velocidade podem ser obtidas a partir da função corrente pelas fórmulas

$$q_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad q_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

2. Num ponto interior de uma região de escoamento sob as condições que impusemos, a pressão do fluido não pode ser menor do que a pressão em qualquer outro ponto numa vizinhança desse ponto. Justifique esta afirmação com o auxílio das afirmações feitas nas secções 54 e 88.
 3. Para o escoamento ao redor de um canto descrito na secção 89, em que ponto da região $x \geq 0, y \geq 0$ a pressão do fluido é máxima?
 4. Mostre que o módulo da velocidade do fluido nos pontos da superfície, cilíndrica na secção 90 é $2|A \sin \theta|$ e que a pressão do fluido sobre o cilindro é máxima nos pontos $z = \pm 1$ e mínima no topo e no fundo do cilindro.
 5. Escreva o potencial complexo para o escoamento ao redor de um cilindro $r = r_0$ quando a velocidade q tende para uma constante real A na medida em que o ponto se afasta do cilindro.
 6. Obtenha a função corrente $\psi = Ar^4 \sin 4\theta$ para um escoamento na região angular $0 \leq \theta \leq \pi/4$ (Fig. 78), e trace uma ou duas das linhas de corrente interiores à região.

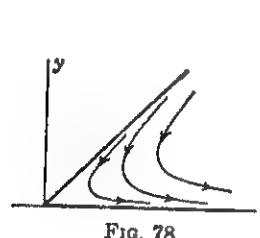


FIG. 78

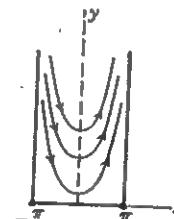


FIG. 79

7. Obtenha o potencial complexo $F = A \sin z$ para um escoamento no interior da região semi-infinita $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2; y \geq 0$ (Fig. 79). Escreva as equações das linhas de corrente.
 8. Se o potencial de velocidade é $\phi = A \log r$, onde $A > 0$, para um escoamento na região $r \geq r_0$, mostre que as linhas de corrente são os raios $\theta = c$ ($r \geq r_0$) e que a taxa de escoamento para fora através de cada círculo completo em torno da origem é $2\pi A$, correspondente a uma fonte dessa força na origem.

¹ Outros problemas sobre escoamento de fluido são apresentados no capítulo 10. Para outros exemplos e problemas veja, por exemplo, L.M. Milne-Thomson, "Theoretical Hydrodynamics".

9. Obtenha o potencial complexo $F = A(z^2 + z^{-2})$ para um escoamento na região $r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Escreva fórmulas para q e ψ . Observe como o módulo $|q|$ varia ao longo da fronteira da região, e verifique que $\psi = 0$ sobre a fronteira.
 10. Se o escoamento a uma distância infinita do cilindro de raio unitário na secção 90 é uniforme numa direção, fazendo um ângulo α com o eixo- x , isto é, se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} q = A \exp(i\alpha) \quad (A > 0),$$

determine o potencial complexo.

$$Resp. F = A[z \exp(-i\alpha) + z^{-1} \exp(i\alpha)].$$

11. A transformação $z = w + 1/w$ leva o círculo $|w| = 1$ no segmento entre os pontos $z = 2$ e $z = -2$ e o domínio exterior ao círculo no resto do plano- z (ver os exercícios 13 e 14, Sec. 41). Escreva

$$\begin{aligned} z - 2 &= r_1 \exp(i\theta_1), & z + 2 &= r_2 \exp(i\theta_2), \\ (z^2 - 4)^{1/2} &= \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_1}{2} \exp \frac{i\theta_2}{2} & (0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_2 < 2\pi); \end{aligned}$$

então a função $(z^2 - 4)^{1/2}$ é univalente e analítica em todos os pontos, exceto no corte de ramo, consistindo do segmento do eixo- x entre os pontos $z = \pm 2$. Mostre que a inversa da transformação $z = w + 1/w$ tal que $|w| > 1$ para todo z não pertencente ao corte de ramo pode ser escrita

$$w = \frac{1}{2} [z + (z^2 - 4)^{1/2}] = \frac{1}{4} \left(\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2} \right)^2.$$

Assim, a transformação e essa inversa estabelece com uma correspondência biunívoca entre os pontos nos dois domínios.²

12. Com o auxílio dos resultados obtidos nos exercícios 10 e 11, deduza a fórmula

$$F(z) = A[z \cos \alpha - (z^2 - 4)^{1/2} \sin \alpha]$$

para o potencial complexo para o escoamento estacionário em volta de uma placa longa de largura 4, cuja secção transversal é o segmento reto entre os dois pontos $z = \pm 2$ na figura 80, quando a velocidade do fluido a uma distância infinita da placa é $A \exp(i\alpha)$. O ramo $(z^2 - 4)^{1/2}$ é o do exercício 11, e $A > 0$.

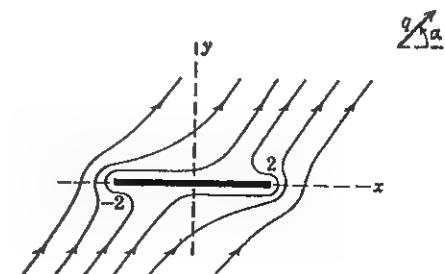


FIG. 80

13. Se $\sin \alpha \neq 0$ no exercício 12, mostre que o módulo da velocidade do fluido ao longo do segmento é infinito nas extremidades $z = \pm 2$ e igual a $|A| \cos \alpha$ no ponto médio.

14. Para simplificar, suponha $0 < \alpha \leq \pi/2$, no exercício 12. Mostre, então, que a velocidade do fluido ao longo do lado superior do segmento representando a placa na figura 80 é zero no ponto $x = 2 \cos \alpha$ e que a velocidade ao longo do lado inferior do segmento é zero no ponto $x = -2 \cos \alpha$.

15. Um círculo com centro num ponto x_0 do eixo- x , onde $0 < x_0 < 1$, passando pelo ponto $z = -1$ é sujeito à transformação $w = z + 1/z$. Os pontos $z = \exp(i\theta)$ podem ser transformados geometricamente somando-se o vetor $r^{-1} \exp(-i\theta)$ ao vetor z . Indique, transformando alguns pontos, que a imagem do círculo é um perfil do tipo ilustrado na figura 80 e que pontos exteriores ao círculo se transformam em pontos exteriores ao perfil. Este é um caso especial do perfil de um *aerofólio de Joukowski*. (Veja também os exercícios 16 e 17 abaixo.)

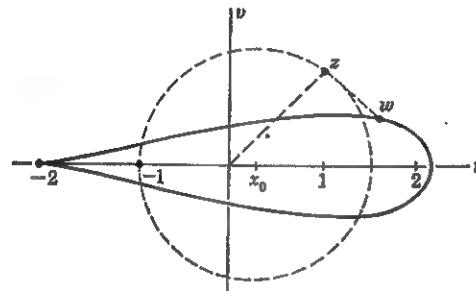


FIG. 81

16. (a) Mostre que a transformação do círculo no exercício 15 é conforme, exceto no ponto $z = -1$. (b) Os números complexos

$$t = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}, \quad \tau = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

representam vetores tangentes unitários a uma curva orientada em $z = -1$ e à sua imagem sob a transformação $w = z + 1/z$. Mostre que $\tau = -t^2$ e, portanto, que o perfil de Joukowski acima tem um ponto de reversão no ponto $w = -2$, e que o ângulo entre as tangentes aí é zero.

17. Dá-se a inversa da transformação $w = z + 1/z$ usada no exercício 15, permutando-se w e z no exercício 11. Determine o potencial complexo para o escoamento ao redor do aerofólio introduzido no exercício 15, quando a velocidade q do fluido a uma distância infinita da origem é A , onde a constante A é real.

18. Observe que, sob a transformação

$$w = e^z + z,$$

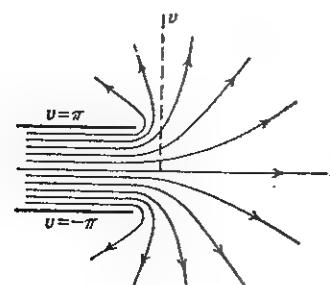


FIG. 82

ambas as partes positiva e negativa da reta $y = \pi$ são transformadas na semi-reta $v = \pi, u \leq -1$. Analogamente, $y = -\pi$ é transformada em $v = -\pi, u \leq -1$ e a faixa $-\pi \leq y \leq \pi$ no plano- w . Note também que a mudança de direções, $\arg (dw/dz)$, sob esta transformação tende para zero quando $x \rightarrow -\infty$. Mostre que as linhas de corrente de um fluido que se escoa através do canal aberto formado pelas semi-retas no plano- w (Fig. 82), são as imagens das retas $y = c$ na faixa. Estas linhas de corrente também representam os equipotenciais do campo eletrostático na proximidade da borda de um capacitor de placas paralelas.

CAPÍTULO 10

A Transformação de Schwarz-Christoffel

91. Transformação do Eixo Real num Polígono. Representamos o vetor tangente unitário a um arco suave e orientado C num ponto z_0 pelo número complexo t . Seja τ o número que designa o vetor tangente unitário no ponto correspondente w_0 da imagem S de C sob uma transformação $w = f(z)$, onde f é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$. Na secção 75 vimos que

$$(1) \quad \arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0).$$

Em particular, se C é um segmento do eixo- x com sentido positivo, da esquerda para a direita, então em cada um dos seus pontos $z_0 = x$ tem-se que $t = 1$ e $\arg t = 0$, e a fórmula (1) reduz-se a

$$(2) \quad \arg \tau = \arg f'(x).$$

Se $f'(z)$ tem argumento constante ao longo desse segmento, segue-se que $\arg \tau$ é constante; isto é, a imagem S desse segmento também é um segmento de reta.

Vamos agora construir uma transformação $w = f(z)$ que leve todo o eixo- x num polígono de n lados, onde x_1, x_2, \dots, x_{n-1} e $z = \infty$ são os pontos do eixo cujas imagens serão os vértices do polígono e onde

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}.$$

Os vértices são os pontos $w_j = f(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) e $w_n = f(\infty)$. A função f deve ser tal que $\arg f'(z)$ dê um salto de um valor constante para outro nos pontos x_j , quando o ponto z percorre o eixo- x .

Se f é escolhida como sendo uma função tal que

$$(3) \quad f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}},$$

onde A é uma constante complexa e cada k_j é uma constante real, o argumento de

$f'(z)$ se comporta na maneira prescrita quando z percorre o eixo real; pois o argumento da função (3) pode ser escrito

$$(4) \quad \arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \dots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}).$$

Quando $z = x$ e $x < x_1$,

$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \dots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi.$$

Quando $x_1 < x < x_2$, $\arg(z - x_1) = 0$ aqui, e cada um dos demais argumentos é π . De acordo com a fórmula (4), então, $\arg f'(z)$

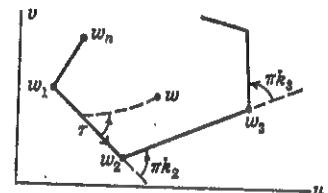
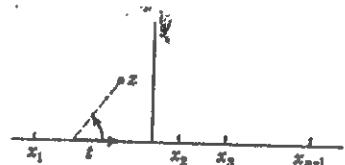


FIG. 83

aumenta abruptamente do ângulo $k_1\pi$, quando z se move para a direita passando pelo ponto $z = x_1$. O mesmo ocorre no ponto $z = x_2$, sendo que o aumento nesse ponto é de $k_2\pi$, etc.

Em vista da equação (2), o vetor unitário τ é constante em direção quando z se desloca de x_{j-1} até x_j , de modo que w se move nessa direção fixa ao longo de uma reta. Mas a direção de τ muda abruptamente, do ângulo $k_j\pi$, na imagem w_j de x_j (Fig. 83). Esses ângulos $k_j\pi$ são os ângulos externos do polígono descrito pelo ponto w .

Os ângulos externos podem ser limitados entre $-\pi$ e π ; então $-1 < k_j < 1$. Supomos que os lados do polígono nunca interceptem. Então, a soma dos ângulos externos de um polígono fechado é 2π , e o ângulo externo no vértice w_n , imagem do ponto $z = \infty$, pode ser escrito

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1})\pi.$$

Assim, os números k_j devem satisfazer necessariamente às condições

$$(5) \quad k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Note que $k_n = 0$ quando

$$(6) \quad k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 2;$$

Dado um polígono P , vamos examinar o número de constantes na transformação de Schwarz-Christoffel que devem ser determinadas, de modo a transformar P no eixo- x . Para este fim podemos escrever $z_0 = 0$, $A = 1$ e $B = 0$, e simplesmente exigir que um certo polígono P' semelhante a P seja transformado naquele eixo. O tamanho, a orientação e a posição de P' podem então ser ajustados, de modo a coincidirem com os de P , introduzindo-se as constantes apropriadas A e B .

Os números k_j são todos determinados a partir dos ângulos externos nos vértices de P . As $n-1$ constantes x_j permanecem. A imagem do eixo- x é certo polígono P' que tem os mesmos ângulos que P ; mas se P' é semelhante a P , então $n-2$ dos seus lados devem ter uma razão comum para os lados correspondentes de P , condição que é expressa por meio de $n-3$ equações nas $n-1$ constantes reais x_j . Assim, *dois dos números x_j , ou duas relações entre eles, podem ser escolhidos arbitrariamente*, desde que essas $n-3$ equações nas demais $n-3$ constantes tenham soluções reais.

Quando um ponto finito $z = x_n$ sobre o eixo- x , ao invés do ponto infinito, representa a imagem do vértice w_n , segue-se da secção precedente que a transformação de Schwarz-Christoffel toma a forma

$$(8) \quad w = A \int_{z_0}^z (z' - x_1)^{-k_1} (z' - x_2)^{-k_2} \cdots (z' - x_n)^{-k_n} dz' + B,$$

onde $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2$. Os expoentes k_j são determinados a partir dos ângulos externos do polígono. Mas neste caso há n constantes reais x_j que devem satisfazer às $n-3$ equações mencionadas acima. Assim, *três dos números x_j , ou três condições sobre esses n números, podem ser escolhidas arbitrariamente* na transformação (8) de um dado polígono no eixo- x .

93. Triângulos e Retângulos. A transformação de Schwarz-Christoffel é escrita em termos das *imagens* x_j dos vértices do polígono, e não em termos dos vértices em si. Não se pode escolher arbitrariamente mais de três dessas imagens, de modo que, quando o polígono dado tem mais de três lados, algumas das imagens devem ser determinadas para que o polígono dado, ou qualquer polígono congruente com ele, seja transformado no eixo real. A seleção de condições para a determinação dessas constantes, condições que sejam convenientes para o uso, muitas vezes requer engenhosidade.

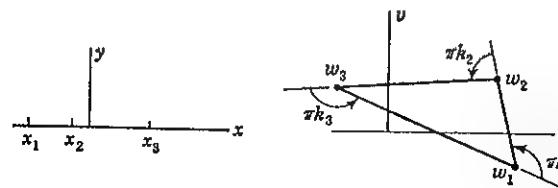


FIG. 84

Surge, entretanto, uma outra limitação no uso da transformação, por causa da integração que é complicada. Na maioria dos casos, a integral não pode ser

avaliada em termos de um número finito de funções elementares. Ainda em tais casos, a transformação pode ser altamente útil, embora a resolução de problemas por meio da mesma, possa tornar-se bastante complicada.

Se o polígono é um triângulo com vértices nos pontos w_1 , w_2 e w_3 (Fig. 84), a transformação pode ser escrita

$$(1) \quad w = A \int_{z_0}^z (z' - x_1)^{-k_1} (z' - x_2)^{-k_2} (z' - x_3)^{-k_3} dz' + B,$$

onde $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. Em termos dos ângulos internos θ_j ,

$$k_j = 1 - \frac{1}{\pi} \theta_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Aqui tomamos todas as três imagens x_j como pontos finitos do eixo- x . Podem-se atribuir valores arbitrários a cada uma das três constantes x_j . As constantes complexas A e B , associadas com o tamanho e a posição do triângulo, podem ser determinadas de tal modo que a região triangular dada, seja transformada no semiplano superior.

Se tomamos a imagem do vértice w_3 , como sendo o ponto infinito, a transformação do triângulo fica

$$(2) \quad w = A \int_{z_0}^z (z' - x_1)^{-k_1} (z' - x_2)^{-k_2} dz' + B,$$

onde se pode atribuir valores reais arbitrários a x_1 e x_2 .

As integrais nas fórmulas (1) e (2) não representam funções elementares, a menos que o triângulo seja degenerado, isto é, a menos que um ou dois dos seus vértices estejam no infinito. A integral na fórmula (2) reduz-se a uma integral elíptica, quando o triângulo é equilátero e quando o mesmo é um triângulo retângulo com um dos seus ângulos igual a $\pi/3$ ou $\pi/4$. Nestes casos z é uma função elíptica de w , mas para outros triângulos não degenerados o processo de obtenção de z , como função de w , envolve outras complicações.

Para um triângulo equilátero, $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$. Convém escrever $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = \infty$ e usar a fórmula (2), onde $z_0 = 1$, $A = 1$ e $B = 0$. Então a transformação fica

$$(3) \quad w = \int_1^z (z' + 1)^{-1} (z' - 1)^{-1} dz'.$$

A imagem do ponto $z = 1$ é obviamente $w = 0$; isto é, $w_2 = 0$. Quando $z = -1$ na integral, escrevemos $z' = x$; então $-1 < x < 1$.

$$g(x) = [\exp(-\frac{1}{2}\pi i)]^2 |g(x)| = -|g(x)|.$$

Quando $-a < x < -1$, então $g(x) = [\exp(-\frac{1}{2}\pi i)]^3 |g(x)| = i|g(x)|$.
Portanto,

$$\begin{aligned} w_1 &= - \int_0^{-a} g(x) dx = - \int_0^{-1} g(x) dx - \int_{-1}^{-a} g(x) dx \\ &= \int_0^{-1} |g(x)| dx - i \int_{-1}^{-a} |g(x)| dx = -b + ic. \end{aligned}$$

Recomenda-se ao leitor mostrar, como exercício, que

$$(12) \quad w_2 = -b, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ic.$$

A posição e as dimensões do retângulo são mostradas na figura 86.

94. Polígonos Degenerados. Vamos agora aplicar a transformação de Schwarz-Christoffel a certos polígonos degenerados, para os quais as integrais representam funções elementares. Para fins de ilustração, vamos começar com algumas transformações conhecidas.

Como primeiro exemplo, transformemos a faixa semi-infinita

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad v \geq 0$$

no semi-plano $v \geq 0$. Consideraremos esta faixa como formalimite de um triângulo com vértices w_1, w_2 e w_3 (Fig. 87), quando a parte imaginária de w_3 tende para o infinito.

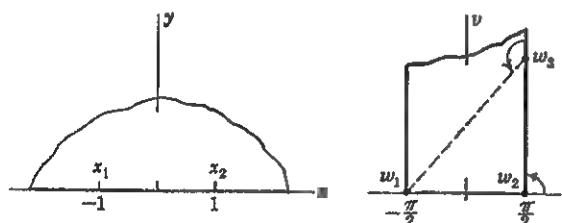


FIG. 87

Os valores-limite dos ângulos externos são

$$\pi k_1 = \pi k_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \pi k_3 = \pi.$$

Escolhemos os pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = \infty$ como imagens dos vértices. Então, a derivada da função transformadora pode ser escrita

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1}(z-1)^{-1} = A'(1-z^2)^{-1}.$$

Assim, $w = A' \operatorname{sen}^{-1} z + B$, ou, se escrevemos $A' = 1/a$ e $B = b/a$, então

$$z = \operatorname{sen}(aw - b).$$

Esta transformação satisfaz às condições $z = -1$ quando $w = -\pi/2$ e $z = 1$ quando $w = \pi/2$, desde que se atribuam a seus coeficientes os valores $a = 1$ e $b = 0$. A transformação resultante é

$$z = \operatorname{sen} w,$$

a qual transforma a faixa no semiplano, como já verificamos na seção 39.

95. A Faixa Infinita. Consideremos a faixa $0 < v < \pi$ como formalimite de um losango com vértices nos pontos $w_1 = \pi i$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ e w_4 quando w_2 e w_4 tendem para o infinito, para a esquerda e para a direita, respectivamente (Fig. 88). No limite, os ângulos externos ficam

$$\pi k_1 = 0, \quad \pi k_2 = \pi, \quad \pi k_3 = 0, \quad \pi k_4 = \pi.$$

Deixamos x_1 para ser determinado e escolhemos os valores $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ e $x_4 = \infty$. A derivada da função transformadora de Schwarz-Christoffel, então, pode ser escrita

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^0 z^{-1} (z - 1)^0 = \frac{A}{z};$$

assim, $w = A \operatorname{Log} z + B$.

Ora, $B = 0$, pois $w = 0$ quando $z = 1$. A constante A deve ser real, pois o ponto w está sobre o eixo real quando $z = x$ e $x > 0$. A imagem do ponto $w = \pi i$ é o ponto $z = x_1$, onde x_1 é

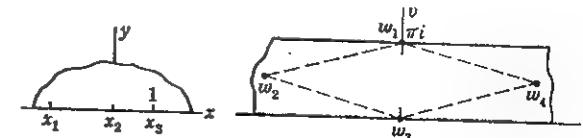


FIG. 88

um número negativo; portanto,

$$\pi i = A \operatorname{Log} x_1 = A \operatorname{Log} |x_1| + A\pi i.$$

Identificando as partes real e imaginária, vemos que $|x_1| = 1$ e $A = 1$. Logo a transformação é

$$w = \log z;$$

também $x_1 = -1$. Na secção 38 verificamos que esta transformação leva a faixa no semiplano.

O processo usado nesta e na secção precedente não é rigorosamente perfeito, pois os valores-limite de ângulos e coordenadas não foram introduzidos de maneira ordenada. Utilizamos valores-limite apenas na medida da conveniência. Desde que, entretanto, verifiquemos a transformação obtida, vemos que não é essencial justificar cada passagem da dedução da função transformadora. O método formal usado aqui é mais breve e menos tedioso do que métodos mais rigorosos.

EXERCÍCIOS

1. Na transformação (1), da secção 93, escreva $B = z_0 = 0$ e

$$A = \exp \frac{3\pi i}{4}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{3}{4}$$

para transformar o eixo- x num *triângulo reto isósceles*. Em termos da constante positiva b , onde

$$b = \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{1}{2}} dx,$$

mostre que os vértices do triângulo são os pontos

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b.$$

Mostre também que $2b = B(1/4, 1/4)$, onde B é a função beta.

- Obtenha as fórmulas (12), Sec. 93, para os vértices w_2, w_3 e w_4 do retângulo ilustrado na figura 86.
- Quando $0 < a < 1$ nas fórmulas (8) e (9), Sec. 93, mostre que os vértices do retângulo são os indicados na figura 86, se b e c agora têm os valores

$$b = \int_0^a |g(x)| dx, \quad c = \int_a^1 |g(x)| dx.$$

- Mostre que o caso particular

$$w = i \int_0^z (\zeta + 1)^{-1} (\zeta - 1)^{-1} \zeta^{-1} d\zeta$$

da transformação de Schwarz-Christoffel (7), Sec. 92, transforma o eixo- x no *quadrado* com vértices

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ib,$$

onde o número positivo b é dado em termos da função beta pela fórmula

$$b = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

- Use a transformação de Schwarz-Christoffel para obter a transformação $w = z^m$, que transforma a região angular $0 \leq \arg w \leq m\pi$ no semiplano $y \geq 0$, e o ponto $w = 1$ no ponto $z = 1$. Considere a região angular como caso-limite do triângulo mostrado na figura 89, quando α tende para zero.

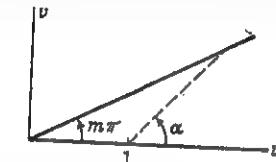


Fig. 89

- Veja a figura 26 do Apêndice 2. Ao percorrer a fronteira da região no plano- w , um ponto w vai de A' a B' , de C' a D' e de D' a E' . Este caminho poderia ser considerado como um triângulo degenerado; ao menos o ponto está se movendo no mesmo sentido no lado direito de E' que no lado esquerdo de A' , e as extremidades infinitas dessas partes do caminho poderiam ser consideradas como um só ponto sobre o mesmo lado do triângulo. Proceda formalmente com a transformação de Schwarz-Christoffel para obter a função transformadora dada com a figura.

- Na secção 92, use a condição (5) e condições para a existência de integrais impróprias de funções reais, para mostrar que $F(x)$ tem algum limite W_n quando $x \rightarrow \infty$, onde $F(z)$ é definida pela equação (3) dessa secção. Mostre também que a integral de $f'(z)$ ao longo de cada arco de um semicírculo $|z| = R$, $y \geq 0$, tende para zero quando $R \rightarrow \infty$. Deduza então que $F(z)$ tem o limite W_n quando $z \rightarrow \infty$ ($y \geq 0$), como indicado na fórmula (6).

- Um caso particular da transformação linear fracionária (6), Sec. 35, que transforma o disco unitário $|Z| \leq 1$ conformemente no semiplano $y \geq 0$, é

$$Z = -\frac{z-i}{z+i}.$$

Sejam Z_j as imagens dos pontos $z = x_j$ sob essa transformação, onde x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) são os pontos usados na transformação de Schwarz-Christoffel (8), Sec. 92. Mostre formalmente (sem determinar os ramos das funções irracionais) que

$$\frac{dw}{dZ} = A'(Z - Z_1)^{-k_1}(Z - Z_2)^{-k_2} \cdots (Z - Z_n)^{-k_n},$$

onde $|Z_j| = 1$ e A' é uma constante, e que, portanto, a transformação

$$w = A' \int_0^Z (\zeta - Z_1)^{-k_1} (\zeta - Z_2)^{-k_2} \cdots (\zeta - Z_n)^{-k_n} d\zeta + B$$

leva o *interior do círculo* $|Z| = 1$ no *interior de um polígono*, sendo que os pontos Z_j sobre o círculo são as imagens dos vértices do polígono.

- Use resíduos para provar a seguinte extensão da propriedade da derivada logarítmica dada no exercício 10, Sec. 69. Seja g uma função analítica num domínio simplesmente conexo D , onde $g'(z) \neq 0$. Seja C um caminho fechado em D percorrido no sentido positivo, tal que $g(z) \neq 0$ sobre C . Então o número de zeros de g inteiros a C é dado pela fórmula

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz,$$

10. Na fórmula para N , no exercício 9, escreva $g(z) = w(z) - w_0$, onde w é a função transformadora de Schwarz-Christoffel (7), Sec. 92, e o ponto w_0 é interior ou exterior ao polígono P , que é a imagem do eixo- x ; assim, $w(x) \neq w_0$. Seja C o caminho consistindo do semicírculo superior de um círculo $|z| = R$ e de um segmento $-R < x < R$ do eixo- x , que contém todos os $n - 1$ pontos x_j , onde um pequeno segmento em torno de cada x_j é substituído pelo semicírculo de um círculo $|z - x_j| = r_j$ tendo esse segmento como diâmetro. Então, o número de pontos z inteiros a C onde $w(z) = w_0$ é

$$N_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w'(z)}{w(z) - w_0} dz.$$

Faça r_j tender para zero e prove que o número de pontos no semiplano superior do plano- z nos quais $w(z) = w_0$ é

$$N = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{w'(x)}{w(x) - w_0} dx.$$

Como

$$\int_P \frac{dw}{w - w_0} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{w'(x)}{w(x) - w_0} dx,$$

deduza que $N = 1$ se w_0 é interior a P e que $N = 0$ se w_0 é exterior a P , e que, portanto, a transformação do semiplano $y > 0$ no interior de P é biunívoca.

96. Escoamento de Fluido num Canal através de uma Fenda. Vamos apresentar um outro exemplo de escoamento estacionário ideal (Cap. 9), exemplo que mostrará como fontes e sorvedouros influem em problemas de escoamento de um fluido.

Consideremos o escoamento estacionário bidimensional de um fluido entre dois planos paralelos $y = 0$ e $y = \pi$, quando o fluido entra através de uma fenda estreita ao longo da reta $x = 0$ no primeiro plano (Fig. 90). Suponhamos que a taxa



FIG. 90

de escoamento de fluido para dentro do canal, através da fenda, seja Q unidades de volume por unidade de tempo, para cada unidade de profundidade do canal, onde a profundidade é medida perpendicularmente ao plano- xy . Então a taxa de escoamento para fora em cada uma das extremidades é $\frac{1}{2}Q$.

Transformamos a faixa no semiplano superior do plano- w por meio da transformação $z = \text{Log } w$, deduzida na seção precedente; então

(1)

$$w = e^z = e^x e^{iy}.$$

A imagem do eixo- x é o eixo- u positivo, e a imagem da reta $y = \pi$ é a parte negativa do eixo- u . Assim, a fronteira da seção transversal do canal é transformada na fronteira do semiplano.

A imagem do ponto $z = 0$ é o ponto $w = 1$. A imagem de um ponto $z = x_0$ com $x_0 > 0$ é um ponto $w = u_0$ onde $u_0 > 1$. A taxa de escoamento de fluido, através de uma curva ligando o ponto $z = x_0$ a um ponto (x, y) no interior da faixa, é uma função corrente $\psi(x, y)$ para o escoamento (Sec. 88). Se x_1 é um número real negativo, então a taxa de escoamento para dentro do canal através da fenda pode ser escrita

$$\psi(x_1, 0) = Q.$$

Ora, sob uma transformação conforme, a função ψ é uma função de u e v que representa a função corrente para o escoamento na região no plano- w ; isto é, a taxa de escoamento é a mesma através das curvas correspondentes nos dois planos. Como a imagem do ponto $z = x_1$ é um ponto $w = u_1$ com $0 < u_1 < 1$, a taxa de escoamento através de qualquer curva, ligando os pontos $w = u_0$ e $w = u_1$ e contida no semiplano superior do plano- w também é igual a Q . Assim, existe uma fonte no ponto $w = 1$ igual à fonte no ponto $z = 0$.

O argumento acima aplica-se em geral para mostrar que, sob uma transformação conforme, uma fonte ou um sorvedouro num ponto dado corresponde a uma fonte ou um sorvedouro igual na imagem desse ponto.

Quando $x \rightarrow -\infty$, a imagem do ponto z tende para o ponto $w = 0$. Um sorvedouro de intensidade $\frac{1}{2}Q$ neste último ponto corresponde ao sorvedouro infinitamente afastado para a esquerda na faixa. Para aplicar o argumento acima neste caso, consideramos a taxa de escoamento através de uma curva ligando as fronteiras $y = 0$ e $y = \pi$ da parte esquerda da faixa e o escoamento, através da imagem dessa curva no plano- w .

O sorvedouro na extremidade direita da faixa transforma-se num sorvedouro no infinito no plano- w .

A função corrente ψ para o escoamento no semiplano superior do plano- w , neste caso, deve ser uma função que tem um valor constante ao longo de cada uma das três partes do eixo- u . Além disso, seu valor deve aumentar de Q quando o ponto w se move em torno do ponto $w = 1$ da posição $w = u_0$ à posição $w = u_1$, e o mesmo deve diminuir de Q quando w se move de maneira correspondente na vizinhança da origem. Em termos dos ângulos polares θ_1 e θ_2 variando de 0 a π , onde

$$w \sim r_1 \exp \theta_1, \quad w - 1 \sim r_2 \exp \theta_2,$$

vemos que a função

$$\psi = \frac{Q}{\pi} \left(\theta_2 - \frac{1}{2} \theta_1 \right)$$

satisfaz a essas exigências. Além disso, esta função é harmônica porque é a parte imaginária da função

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q}{\pi} \left[\operatorname{Log}(w-1) - \frac{1}{2} \operatorname{Log} w \right] \\ &= \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log}(w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

A função F é um potencial complexo para o escoamento no plano- w . Como $w = \exp z$, um potencial complexo para o escoamento no canal é

$$F(z) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log}(e^{z/2} - e^{-z/2}).$$

A menos de uma constante aditiva, o potencial pode ser escrito

$$(2) \quad F(z) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{sh} \frac{z}{2}.$$

O vetor velocidade $\overline{F'(z)}$ é dado pela fórmula

$$(3) \quad q = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{cotgh} \frac{z}{2}.$$

Desta fórmula vê-se que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} q = \frac{Q}{2\pi}.$$

Outrossim, o ponto $z = \pi i$ é um *ponto de estagnação*; isto é, a velocidade é zero nesse ponto. Logo a pressão do fluido ao longo da parede $y = \pi$ do canal é máxima nos pontos opostos à fenda.

A função corrente $\psi(x, y)$ para o canal é a parte imaginária da função $F(z)$, dada pela fórmula (2). As linhas de corrente $\psi(x, y) = c$ são, portanto, as curvas

$$\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arg} \left(\operatorname{sh} \frac{z}{2} \right) = c,$$

equação que se reduz a

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = k \operatorname{tgh} \frac{x}{2},$$

onde k é uma constante real qualquer. Algumas dessas linhas de corrente são indicadas na figura 90.

97. Escoamento num Canal com estreitamento. Como outro exemplo de aplicação da transformação de Schwarz-Christoffel, vamos determinar o potencial complexo para o escoamento de um fluido num canal com uma mudança brusca em sua largura (Fig. 91). Tomamos uma unidade de comprimento tal que a largura da parte mais ampla do canal seja de π unidades; então $h\pi$ representa a largura da parte mais estreita, onde $0 < h < 1$. Suponhamos que a constante real q_0 designe

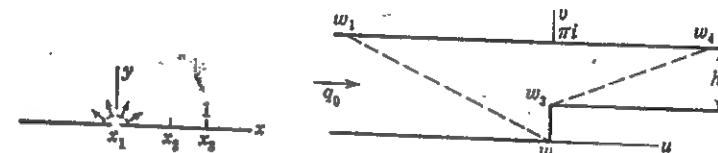


FIG. 91

a velocidade do fluido longe do estreitamento, na parte larga; mais precisamente,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} q = q_0,$$

onde a variável complexa q representa o vetor velocidade. A taxa de escoamento por unidade de profundidade através do canal, ou a intensidade da fonte à esquerda e do sorvedouro à direita, é então

$$(1) \quad Q = \pi q_0.$$

A seção transversal do canal pode ser considerado como caso-limite do quadrilátero com os vértices w_1, w_2, w_3 e w_4 , indicados na figura 91, quando o primeiro e o último desses vértices tendem para o infinito, para a esquerda e para a direita, respectivamente. No limite os ângulos externos se tornam

$$\pi k_1 = \pi, \quad \pi k_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \pi k_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad \pi k_4 = \pi.$$

Se escrevemos $x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$, deixando x_2 para ser determinado, onde $0 < x_2 < 1$, a derivada da função transformadora pode ser escrita

$$(2) \quad \frac{dw}{dz} = Az^{-1}(z - x_2)^{-\frac{1}{2}}(z - 1)^{\frac{1}{2}}$$

Para simplificar a determinação das constantes A e x_2 na fórmula acima, vamos lançar mão, imediatamente, do potencial complexo do escoamento. A fonte do escoamento no canal infinitamente afastada para a esquerda é transformada

numa fonte igual em $z = 0$ (Sec. 96). Toda a fronteira da secção transversal do canal tem o eixo- x como sua imagem. Em vista da equação (1), então, o potencial complexo para o escoamento no canal é transformado na função

$$(3) \quad F = q_0 \operatorname{Log} z = q_0 \operatorname{Log} r + i q_0 \theta,$$

visto que esta é o potencial para o escoamento no semiplano superior do plano- z com a devida fonte na origem. Note que o sorvedouro à direita do canal deve transformar-se num sorvedouro no infinito no plano- z .

O conjugado complexo da velocidade q no plano- w pode ser escrito

$$\overline{q(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dw}.$$

Assim, em vista das fórmulas (2) e (3), podemos escrever

$$(4) \quad \overline{q(w)} = \frac{q_0}{A} \left(\frac{z - x_2}{z - 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Na posição-límite do ponto w_1 , que corresponde a $z = 0$, a velocidade é a constante real q_0 . Conseqüentemente, decorre da fórmula (4) que

$$q_0 = \frac{q_0}{A} \sqrt{x_2}.$$

Na posição-límite de w_4 , que corresponde a $z = \infty$, seja q_4 a velocidade. Parece plausível que q tenda para q_4 , em todos os pontos de um segmento vertical que atravesse a parte estreita do canal, quando o segmento se afasta para o infinito à direita. Poderíamos mostrar a veracidade desta conjectura, determinando primeiro w como função de z a partir da fórmula (2); mas para abreviar nossa discussão, vamos supor que a conjectura seja verdadeira. Então, como o escoamento é estacionário,

$$\pi h q_4 = \pi q_0 = Q,$$

ou $q_4 = q_0/h$. Fazendo z tender para o infinito na fórmula (4), vemos que

$$\frac{q_0}{h} = \frac{q_0}{A}.$$

Assim

$$(5) \quad A = h, \quad x_2 = h^2,$$

$$(6) \quad \overline{q(w)} = \frac{q_0}{h} \left(\frac{z - h^2}{z - 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da equação (6) podemos ver que o módulo $|q|$ da velocidade se torna infinito no canto w_3 do estreitamento, pois a imagem desse ponto é o ponto $z = 1$. Também, o canto w_2 é um ponto de estagnação, ponto onde $q = 0$. Ao longo da fronteira do canal, a pressão do fluido é, portanto, máxima em w_2 e mínima em w_3 .

Para escrever a relação entre o potencial e a variável w , devemos integrar a fórmula (2), a qual agora pode ser escrita

$$(7) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{h}{z} \left(\frac{z - 1}{z - h^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Introduzindo a nova variável s , onde

$$\frac{z - h^2}{z - 1} = s^2,$$

podemos mostrar que a equação (7) se reduz à equação

$$\frac{dw}{ds} = 2h \left(\frac{1}{1 - s^2} - \frac{1}{h^2 - s^2} \right).$$

Portanto,

$$(8) \quad w = h \operatorname{Log} \frac{1 + s}{1 - s} - \operatorname{Log} \frac{h + s}{h - s},$$

onde a constante de integração é zero, pois quando $z = h^2$, isto é, quando $s = 0$, $w = 0$.

Em termos de s o potencial (3) fica

$$F = q_0 \operatorname{Log} \frac{h^2 - s^2}{1 - s^2};$$

Conseqüentemente

$$(9) \quad s^2 = \frac{\exp(F/q_0) - h^2}{\exp(F/q_0) + 1}.$$

Substituindo s em (8) pelo segundo membro de (9), obtemos uma relação implícita entre o potencial $F(w)$ e w .

98. Potencial Eletrostático ao redor de um Bordo de uma Placa Condutora. Duas placas condutoras paralelas infinitas são mantidas ao potencial eletrostático $V = 0$, e uma placa semi-infinita paralela, localizada no meio das duas placas, é mantida ao potencial $V = 1$. O sistema de coordenadas e a unidade de comprimen-

CAPÍTULO 11

Fórmulas Integrais de Poisson

99. Fórmula Integral de Poisson. A fórmula integral de Cauchy

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

dá os valores de uma função analítica f nos pontos z interiores a um caminho fechado C_0 , em termos dos valores de f nos pontos z' de C_0 . Quando C_0 é um círculo, podemos obter uma fórmula correspondente para uma função harmônica, isto é, uma fórmula que resolve o problema de Dirichlet para o círculo. A identificação das partes reais na fórmula (1), onde $f = u + iv$, dá u nos pontos interiores a C_0 em termos de ambas as partes u e v em pontos de C_0 ; torna-se, assim, necessária uma modificação no processo.

Seja $z' = r_0 \exp(i\theta')$ a equação do círculo C_0 e escrevamos $z = r \exp(i\theta)$, onde $r < r_0$ (Fig. 95). O inverso z_1 do ponto z em relação ao círculo pode ser escrito

$$(2) \quad z_1 = \frac{r_0^2}{r} \exp(i\theta) = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{z'\bar{z}}{\bar{z}}$$

Quando uma função f é analítica no interior de e sobre o círculo, a fórmula (1) dá $f(z)$; mas o valor da integral é zero quando z é substituído por z_1 . Após substituir dz' por $iz'd\theta'$, podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z'}{z' - z} - \frac{z'}{z' - z_1} \right) f(z') d\theta',$$

supondo no momento que $z \neq 0$. O fator do integrando entre parêntesis é real, pois, em vista da expressão final (2) para z_1 , esse fator pode ser escrito nas formas

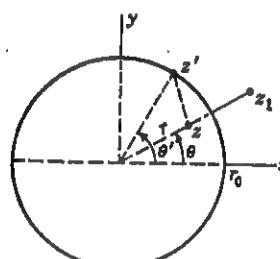


FIG. 95

$$(3) \quad \frac{z'}{z' - z} - \frac{1}{1 - \bar{z}'/\bar{z}} = \frac{z'}{z' - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}' - \bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|z' - z|^2}.$$

Uma alternativa da fórmula integral de Cauchy é, portanto,

$$(4) \quad f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_0 e^{i\theta'})}{|z' - z|^2} d\theta' \quad (r < r_0).$$

Observamos que $|z' - z|$ é a distância entre z' e z ,

$$(5) \quad |z' - z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2 > 0;$$

observamos também que a fórmula (4) permanece válida quando $z = 0$, pois nesse caso ela se reduz à fórmula (1) para $f(0)$.

Se u é a parte real de f , então, de acordo com a fórmula (4),

$$(6) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)u(r_0, \theta')}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2} d\theta' \quad (r < r_0).$$

Esta é a *fórmula integral de Poisson* para a função harmônica u no círculo.

A integral na fórmula representa uma transformação integral linear de $u(r_0, \theta')$, com parâmetros r e θ , que transforma a função $u(r_0, \theta')$ em $2\pi u(r, \theta)$. O núcleo desta transformação integral, função representada pelas expressões (3), é a função real positiva

$$(7) \quad P(r_0, r, \theta' - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2} = \frac{r_0^2 - r^2}{|z' - z|^2}.$$

Esta função é chamada *núcleo de Poisson*. Como $\bar{z}/(\bar{z}' - \bar{z})$ e seu conjugado $z/(z' - z)$ tem a mesma parte real, vemos das equações (3) que

$$(8) \quad P(r_0, r, \theta' - \theta) = \Re\left(\frac{z'}{z' - z} + \frac{z}{z' - z}\right) = \Re\left(\frac{z' + z}{z' - z}\right);$$

assim P é uma função harmônica de (r, θ) interior a C_0 para cada z' fixado sobre C_0 . Da equação (7) vemos que P é uma função periódica e par de $\theta' - \theta$, com período 2π , e que $P = 1$ quando $r = 0$.

A fórmula integral de Poisson (6) pode agora ser escrita

$$(9) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta) u(r_0, \theta') d\theta' \quad (r < r_0).$$

Considerando o caso particular $f = u = 1$, vemos que P tem a propriedade

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta) d\theta' = 1 \quad (r < r_0).$$

Supusemos f analítica não só no interior de C_0 mas também sobre C_0 ; assim, u é harmônica num domínio que contenha todos os pontos do círculo. Em particular, u é contínua sobre C_0 . As condições serão agora relaxadas.

100. Um Problema de Dirichlet para o Círculo. Seja F uma função seccionalmente contínua de θ ($0 < \theta < 2\pi$). Então a função u definida pela transformação integral de Poisson de F , a saber,

$$(1) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta) F(\theta') d\theta' \quad (r < r_0),$$

satisfaz às seguintes condições: u é harmônica em todo o interior do círculo $r = r_0$ e, para cada θ fixado onde F é contínua,

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow r_0} u(r, \theta) = F(\theta) \quad (r < r_0).$$

Assim, u é uma solução do problema de Dirichlet para o círculo no sentido de que o valor na fronteira $F(\theta)$ é o limite de $u(r, \theta)$, quando o ponto (r, θ) tende para (r_0, θ) ao longo de um raio do círculo, exceto num número finito de pontos (r_0, θ) onde F possa ter saltos.

Antes de provar a afirmação acima, vamos aplicá-la para determinar o potencial $V(r, \theta)$ interior a um cilindro $r = 1$ quando $V = 0$ sobre a parte superior do cilindro e $V = 1$ sobre a parte inferior (Fig. 65). Este problema foi resolvido por meio da transformação conforme na seção 86. Na fórmula (1) escrevemos V em lugar de u , $F(\theta) = 0$ quando $0 < \theta < \pi$ e $F(\theta) = 1$ quando $\pi < \theta < 2\pi$, para obter a equação

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} P(1, r, \theta' - \theta) d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(1 - r^2) d\theta'}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta' - \theta)}. \end{aligned}$$

Podemos escrever uma integral indefinida de P como

$$(3) \quad \int P(1, r, \phi) d\phi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \right),$$

e a função arcotangente aqui pode ser descrita como função contínua de $\phi/2$, que toma valores entre $-\pi$ e π quando $\phi/2$ varia de $-\pi$ a π . Então

$$\pi V(r, \theta) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \theta}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} \right)$$

e, simplificando a expressão para $\operatorname{tg}(\pi V)$, vemos que

$$(4) \quad V(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 - r^2}{2r \operatorname{sen} \theta} \quad (0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi).$$

Que a fórmula (1) define uma função harmônica u no interior do círculo $r = r_0$, decorre do fato de que P nesse caso é harmônica. Como F é contínua por partes, a integral (1) pode ser escrita como soma de um número finito de integrais definidas, cada uma das quais tem um integrando que é contínuo em r , θ e θ' . As derivadas parciais desses integrandos em relação a r e θ também são contínuas no mesmo sentido. Como P satisfaz à equação de Laplace em coordenadas polares, segue-se que u satisfaz a essa equação.

Para estabelecer a condição (2), vamos mostrar que, para cada número positivo ϵ , existe um número δ tal que

$$(5) \quad |u(r, \theta) - F(\theta)| < 2\epsilon \quad \text{sempre que } 0 < r_0 - r < \delta.$$

Em vista da propriedade (10), Sec. 99, de P , a primeira desigualdade em (5) pode ser escrita

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta) [F(\theta') - F(\theta)] d\theta' \right| < 2\epsilon.$$

O integrando é periódico em θ e θ' se considerarmos F periódica.

Como F é contínua no ponto fixado θ , existe um número σ , correspondente ao número dado ϵ , tal que

$$|F(\theta') - F(\theta)| < \epsilon \quad \text{quando } |\theta' - \theta| < \sigma.$$

Vamos escrever

$$I_1(r, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} P(r_0, r, \theta' - \theta) [F(\theta') - F(\theta)] d\theta',$$

$$I_2(r, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\sigma}^{2\pi+\theta-\sigma} P(r_0, r, \theta' - \theta) [F(\theta') - F(\theta)] d\theta'.$$

Então $u(r, \theta) - F(\theta) = I_1 + I_2$. Como $P > 0$,

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |F(\theta') - F(\theta)| P d\theta' < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} P d\theta' = \epsilon.$$

Lembrando-nos de que $P = (r_0^2 - r^2)/|z' - z|^2$, vemos da figura 95 que a função $|z' - z|^2$ tem um valor mínimo positivo $m(\sigma)$, quando θ' , argumento de z' , varia de $\theta + \sigma$ a $2\pi + (\theta - \sigma)$. Se M é uma cota superior de $|F(\theta') - F(\theta)|$ para todos os valores de θ e θ' , então

$$|I_2| < \frac{2\pi M}{2\pi m(\sigma)} (r_0^2 - r^2) \leq \frac{2Mr_0}{m(\sigma)} (r_0 - r) < \epsilon,$$

quando $r_0 - r < m(\sigma)\epsilon/(2Mr_0)$. Portanto, $|I_1| + |I_2| < 2\epsilon$ quando $r_0 - r < \delta$, onde

$$\delta = \frac{m(\sigma)\epsilon}{2Mr_0}.$$

Este é um número δ para o qual a condição (5) é satisfeita.

Quando $r = 0$, a fórmula (1) reduz-se a

$$(7) \quad u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta') d\theta'.$$

Assim, o valor de uma função harmônica no centro do círculo é a média dos seus valores na fronteira do círculo.

Sugere-se ao leitor provar, como exercício, que P e u podem ser representadas por séries das funções harmônicas elementares $r^n \sin n\theta$ e $r^n \cos n\theta$ como segue:

$$(8) \quad P(r_0, r, \theta' - \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta' - \theta) \quad (r < r_0);$$

$$(9) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (r < r_0),$$

onde

$$(10) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta') \cos n\theta' d\theta', \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta') \sin n\theta' d\theta'.$$

101. Problemas de Contorno Relacionados. Deixamos como exercícios os detalhes das demonstrações dos resultados abaixo. Supõem-se contínuas por partes as funções F e G , que representam valores na fronteira.

No caso em que F é uma função ímpar da coordenada y sobre o círculo $r = r_0$, isto é, $F(2\pi - \theta) = -F(\theta)$, a fórmula integral de Poisson (1) da seção 100 pode ser escrita

$$(1) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [P(r_0, r, \theta' - \theta) - P(r_0, r, \theta' + \theta)] F(\theta') d\theta'.$$

Esta função u se anula sobre o diâmetro ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$) do círculo, como é esperado quando interpretamos u como uma temperatura estacionária. A fórmula (1), portanto, resolve o problema de Dirichlet para a região semicircular $r < r_0$,

$0 \leq \theta \leq \pi$ (Fig. 96) em que $u = 0$ sobre o diâmetro AB e, em cada ponto θ onde F é contínua,

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow r_0} u(r, \theta) = F(\theta) \quad (0 < \theta < \pi, r < r_0).$$

Se F é uma função par de y , $F(2\pi - \theta) = F(\theta)$, então

$$(3) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [P(r_0, r, \theta' - \theta) + P(r_0, r, \theta' + \theta)] F(\theta') d\theta'$$

e $\partial u / \partial \theta = 0$ quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. A fórmula (3), portanto, representa uma função u que é harmônica na região semicircular $0 \leq \theta \leq \pi, r < r_0$ (Fig. 96), e satisfaz à condição (2) e à condição de que sua derivada normal sobre o diâmetro AB se anule.

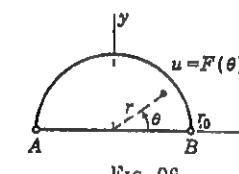


FIG. 96

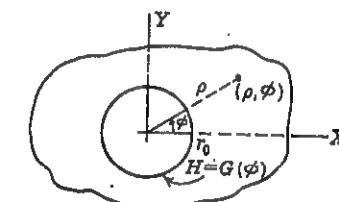


FIG. 97

A transformação conforme $z = r_0^2/Z$ transforma o círculo $|z| = r_0$ no círculo $|Z| = r_0$ no plano-Z e o interior do primeiro círculo no exterior do segundo. Escrevemos $Z = \rho \exp(i\phi)$, como indicado na figura 97; então $r = r_0^2/\rho$ e $\theta = 2\pi - \phi$. Quando $G(\theta) = F(2\pi - \theta)$, a função harmônica u representada pela fórmula (1) da seção 100, torna-se uma função harmônica $H(\rho, \phi)$ no domínio $\rho > r_0$, e a fórmula passa a ter a forma

$$(4) \quad H(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, \rho, \phi' - \phi) G(\phi') d\phi' \quad (\rho > r_0).$$

Para cada ϕ fixado onde G é contínua vemos da condição (2), Sec. 100, que

$$(5) \quad \lim_{\rho \rightarrow r_0} H(\rho, \phi) = G(\phi) \quad (\rho > r_0).$$

Assim, a fórmula (4) resolve o problema de Dirichlet para a região exterior ao círculo $\rho = r_0$. Observamos que $P < 0$ aqui; também,

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, \rho, \phi' - \phi) d\phi' = -1 \quad (\rho > r_0),$$

$$(7) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi') d\phi'.$$

EXERCÍCIOS

1. Use a fórmula integral de Poisson (1), Sec. 100, para deduzir a fórmula

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1} \quad (0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi)$$

para o potencial eletrostático no interior de um cilindro $x^2 + y^2 = 1$ se $V = 1$ sobre o primeiro quadrante ($x > 0, y > 0$) do cilindro, e $V = 0$ sobre o resto dessa superfície. Note também que $1 - V$ é a solução do exercício 8, Sec. 86.

2. Se T designa as temperaturas estacionárias num disco $r \leq 1$ com faces isoladas, quando $T = 1$ sobre o setor $0 < \theta < 2\theta_0$ da borda $r = 1$ e $T = 0$ sobre o resto da borda, onde $0 < \theta_0 < \pi/2$, use a fórmula integral de Poisson para mostrar que

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1 - x^2 - y^2)y_0}{(x - 1)^2 + (y - y_0)^2 - y_0^2},$$

onde $y_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ e $0 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi$. Verifique que esta função T satisfaz às condições de contorno.

3. Seja I a seguinte função impulso unitário finito:

$$I(h, \theta - \theta_0) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{quando } \theta_0 < \theta < \theta_0 + h, \\ 0 & \text{quando } 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta_0 + h < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

onde h é uma constante positiva e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Note que $\int_0^{2\pi} I d\theta = 1$. Com o auxílio de um teorema de valor médio para integrais, mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta) I(h, \theta' - \theta_0) d\theta' = P(r_0, r, \theta - \theta_0) \quad (r < r_0).$$

Assim, o núcleo de Poisson $P(r_0, r, \theta - \theta_0)$ é o limite, quando $h \rightarrow 0$, da função harmônica no interior do círculo $r = r_0$, cujos valores na fronteira são representados pela função impulso $2\pi I$.

4. Mostre que a fórmula no exercício 11, Sec. 65, para a soma de uma série de co-senos pode ser escrita

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n\theta = \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos \theta} \quad (-1 < k < 1),$$

e que, consequentemente, o núcleo de Poisson tem a representação por série (8), Sec. 100. Na Sec. 100, mostre que a série na fórmula (8) converge uniformemente em relação a θ' ; obtenha, então, da fórmula (1) a representação por série (9) para u , quando F é seccionalmente contínua. Use as fórmulas (9) e (10) da Sec. 100 para determinar as temperaturas estacionárias $T(r, \theta)$ num cilindro sólido $r < r_0$ de comprimento infinito se $T(r_0, \theta) = A \cos \theta$. Mostre que não há escoamento de calor através do plano $y = 0$.

Resp. $T = A(r/r_0) \cos \theta = Ax/r_0$.

7. Como casos particulares da fórmula (4), Sec. 101, obtenha as fórmulas

$$(a) H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, \rho, \phi + \phi') - P(r_0, \rho, \phi - \phi')] G(\phi') d\phi',$$

$$(b) H(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, \rho, \phi' + \phi) + P(r_0, \rho, \phi' - \phi)] G(\phi') d\phi'$$

para as funções harmônicas na região ilimitada $\rho > r_0, 0 \leq \phi \leq \pi$, ilustrada na Fig. 98, se cada uma das funções satisfaz à condição de contorno

$$\lim_{\rho \rightarrow r_0} H(\rho, \phi) = G(\phi) \quad (\rho > r_0, 0 < \phi < \pi)$$

sobre o semi-círculo e se a função (a) se anula sobre os raios BA e DE , enquanto a derivada normal da função (b) se anula sobre esses raios.

8. Dê os detalhes na dedução da fórmula (1) da Sec. 101 como solução do problema de Dirichlet enunciado aí para a região ilustrada na Fig. 96.

9. Dê os detalhes na dedução da fórmula (3) da Sec. 101 como solução do problema de contorno enunciado aí.

10. Obtenha a fórmula (4), Sec. 101, como solução do problema de Dirichlet para o domínio exterior a um círculo (Fig. 97).

11. Diga por que a fórmula (6), Sec. 101, é válida.

12. Deduza a fórmula (7) da Sec. 101.

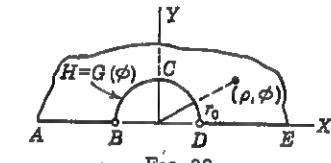


FIG. 98

102. Fórmulas Integrais para o Semiplano. Seja f uma função analítica de z no semi-plano $y \geq 0$ tal que, para algumas constantes positivas k e M , f tem a propriedade

$$(1) \quad |z^k f(z)| < M \quad (y \geq 0, k > 0).$$

Para um ponto z fixado acima do eixo-x seja C_R um semicírculo $z' = R \exp(i\theta')$, onde $R > |z|$ e θ' varia de 0 a π , (Fig. 99). Então, de acordo com a fórmula integral de Cauchy,

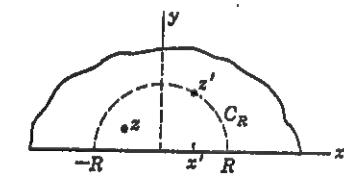


FIG. 99

$$(2) \quad 2\pi i f(z) = \int_{C_R} \frac{f(z') dz'}{z' - z} + \int_{-R}^R \frac{f(x') dx'}{x' - z}.$$

Vemos que a primeira das integrais em (2) se anula quando R tende para o infinito, pois $|f(z')| < M/R^k$; portanto,

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - z} dx' \quad (y > 0).$$

Por força da condição (1), a integral imprópria aqui existe, e é, portanto, igual a seu valor principal.

A representação (3) é uma *fórmula integral de Cauchy para o semiplano*.

No caso em que o ponto z se encontra abaixo do eixo- x , o segundo membro da fórmula (2), e portanto a integral (3), se anula. Conseqüentemente, quando z está acima do eixo- x , para cada constante c temos a seguinte fórmula alternativa:

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x' - z} + \frac{c}{x' - \bar{z}} \right) f(x') dx' \quad (y > 0).$$

Nos dois casos $c = -1$ e $c = 1$ esta fórmula reduz-se, respectivamente, a

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x')}{|x' - z|^2} dx' \quad (y > 0),$$

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x' - x) f(x')}{|x' - z|^2} dx' \quad (y > 0).$$

Se $f = u + iv$, segue-se das fórmulas (5) e (6) que as funções harmônicas conjugadas u e v são representadas no semiplano $y > 0$ em termos dos valores de u na fronteira pelas fórmulas

$$(7) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(x', 0)}{|x' - z|^2} dx' = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x', 0)}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \quad (y > 0),$$

$$(8) \quad v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x')u(x', 0)}{|x' - z|^2} dx' \quad (y > 0).$$

A fórmula (7) é conhecida como *fórmula integral de Poisson para o semiplano* ou *fórmula integral de Schwarz*. Vamos agora relaxar as condições para a validade das fórmulas (7) e (8).

103. Um Problema de Dirichlet para o Semiplano. Seja F uma função real de x limitada para todos os x e contínua exceto, no máximo, quanto a um número finito de saltos finitos. Quando $y \geq \epsilon$ e $|x| < 1/\epsilon$, onde ϵ é uma constante positiva qualquer, a integral

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x') dx'}{(x' - x)^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x + t) dt}{t^2 + y^2}$$

converge uniformemente em relação a x e y , como convergem as integrais das derivadas parciais do integrando em relação a x e y . Também, cada integral é a soma de um número finito de integrais impróprias ou definidas sobre intervalos onde F é contínua, de modo que o integrando de cada uma dessas integrais é uma função contínua de x' , x e y quando $y \geq \epsilon$. Conseqüentemente, cada derivada

parcial de $I(x, y)$ é representada pela integral da derivada correspondente do integrando quando $y > 0$.

Escrevemos $U = yI/\pi$. Assim U é a transformação integral de Schwarz (7), Sec. 102, de F :

$$(1) \quad U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(x')}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \quad (y > 0).$$

O núcleo $y|x' - z|^{-2}$ aqui é a parte imaginária da função $1/(x' - z)$, que é analítica em z quando $y > 0$. Logo, o núcleo é harmônico, de modo que o mesmo satisfaz à equação de Laplace em x e y . Como a ordem de derivação e integração pode ser invertida, a função (1) satisfaz a essa equação. Conseqüentemente U é *harmônica quando $y > 0$* .

Para provar que, para cada x fixado onde F é contínua,

$$(2) \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} U(x, y) = F(x) \quad (y > 0),$$

fazemos $x' - x = y \operatorname{tg} \tau$ para escrever a fórmula (1) como

$$(3) \quad U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y \operatorname{tg} \tau) d\tau \quad (y > 0).$$

Se $\Delta F = F(x + y \operatorname{tg} \tau) - F(x)$, então

$$(4) \quad \pi[U(x, y) - F(x)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta F d\tau = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde, se σ é uma constante positiva pequena,

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{-(\pi/2)+\sigma} \Delta F d\tau, \quad I_2 = \int_{-(\pi/2)+\sigma}^{(\pi/2)-\sigma} \Delta F d\tau, \\ I_3 = \int_{(\pi/2)-\sigma}^{\pi/2} \Delta F d\tau.$$

Se M é um majorante de $|F'|$, então $|\Delta F| \leq 2M$. Para um número positivo dado ϵ escolhemos σ de modo que $6M\sigma < \epsilon$; então

$$|I_1| \leq 2M\sigma < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad |I_3| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Mostraremos agora que, correspondente a ϵ , existe um número δ tal que

$$|I_2| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{quando} \quad 0 < y < \delta;$$

assim a condição (2) decorre da fórmula (4). Como $F(x)$ é contínua em x , existe um número δ' tal que

$$|F(x + y \operatorname{tg} \tau) - F(x)| < \frac{\epsilon}{3\pi} \quad \text{quando} \quad y |\operatorname{tg} \tau| < \delta,$$

e a última condição é satisfeita para todos os τ envolvidos em I_2 se o valor máximo, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \sigma) = \operatorname{cotg} \sigma$, de $|\operatorname{tg} \tau|$ é usado, isto é, se $y < \delta' \operatorname{tg} \sigma$. Então

$$|I_2| < (\pi - 2\sigma) \frac{\epsilon}{3\pi} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{quando} \quad 0 < y < \delta,$$

onde $\delta = \delta' \operatorname{tg} \sigma$. Está, assim, estabelecida a condição..

A fórmula de Schwarz (1) ou (3), portanto, resolve o problema de Dirichlet para o semiplano $y > 0$ com a condição de contorno (2). A fórmula mostra também que U é limitada, $|U(x, y)| \leq M$ no semiplano, onde M é um majorante de $|F(x)|$. Observamos que $U = F_0$, constante, quando $F(x) = F_0$.

De acordo com a fórmula (8) da secção precedente, sob certas condições sobre F , a função

$$(5) \quad V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x')F(x')}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \quad (y > 0)$$

é uma conjugada harmônica da função U dada pela fórmula (1). De fato, a fórmula (5) representa uma conjugada harmônica de U se F é contínua, exceto para, no máximo, um número finito de saltos finitos, e se F tem a propriedade $|x^k F(x)| < M$, onde $k > 0$. Pode-se mostrar que, sob essas condições, U e V satisfazem às condições de Cauchy-Riemann quando $y > 0$.

Casos especiais da fórmula (1), quando F é uma função ímpar ou par, são deixados para os exercícios.

104. Problemas de Neumann para Regiões Circulares. Como na Sec. 99 e Fig. 95, escrevemos $z' = r_0 \exp(i\theta')$ e $z = r \exp(i\theta)$, onde $r < r_0$. Quando z' é fixado, a função

$$(1) \quad Q = -2r_0 \operatorname{Log}|z' - z| = -r_0 \operatorname{Log}[r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2]$$

é harmônica no interior do círculo $|z| = r_0$, pois ela é a parte real de $-2r_0 \operatorname{Log}(z - z')$, onde o corte de ramo de $\operatorname{Log}(z - z')$ é um raio emanando do ponto z' para fora. Além disso, se P é o núcleo de Poisson (7), Sec. 99, então

$$(2) \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{r_0}{r} \frac{2r^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2} = \frac{r_0}{r} [P(r_0, r, \theta' - \theta) - 1].$$

Essas observações sugerem que Q pode ser usada como núcleo numa fórmula integral que representará uma função harmônica u , cuja derivada normal $\partial u / \partial r$ sobre o círculo $r = r_0$ assume valores prescritos $g(\theta)$.

Se g é contínua por partes e u_0 é uma constante arbitrária, a função

$$(3) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r_0, r, \theta' - \theta)g(\theta') d\theta' + u_0 \quad (r < r_0)$$

é harmônica, visto que o integrando é uma função harmônica de (r, θ) . Se o valor médio de g sobre o círculo é zero, isto é, se

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} g(\theta') d\theta' = 0,$$

então, em vista da fórmula (2),

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r_0}{2\pi r} \int_0^{2\pi} (P(r_0, r, \theta' - \theta) - 1)g(\theta') d\theta' = \frac{r_0}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \theta' - \theta)g(\theta') d\theta'.$$

De acordo com as equações (1) e (2) da Sec. 100, segue-se que

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \quad (r < r_0)$$

para cada valor de θ onde g é contínua.

Como Q é constante quando $r = 0$, segue-se das equações (3) e (4) que u_0 é o valor de u no centro do círculo:

$$(6) \quad u_0 = u(0, \theta).$$

Quando g é seccionalmente contínua e satisfaz à condição (4), a fórmula

$$(7) \quad u(r, \theta) = -\frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}[r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2] + r^2 g(\theta') d\theta' + u_0,$$

onde $r < r_0$, resolve, portanto, o problema de Neumann para a região interior ao círculo onde $g(\theta)$ é a derivada normal desta função harmônica u na fronteira, no sentido da condição (5).

Os valores $u(r, \theta)$ podem representar temperaturas estacionárias num disco $r < r_0$ com faces isoladas. Então a condição (5) afirma que o fluxo de calor para o interior do disco na sua borda é proporcional a $g(\theta)$. A condição (4) é a exigência, fisicamente natural, de que a taxa total de escoamento de calor para dentro do disco deve ser zero, já que as temperaturas não variam com o tempo.

Pode-se escrever, em termos do núcleo Q , uma fórmula correspondente para uma função H , harmônica no exterior de um círculo, a saber:

$$(8) \quad H(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r_0, \rho, \phi' - \phi)G(\phi') d\phi' + A \quad (\rho > r_0),$$

onde A é uma constante. Vamos supor que G é seccionalmente contínua e que

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} G(\phi') d\phi' = 0.$$

Então $A = H(\infty, \phi)$ e, para cada ϕ onde H é contínua,

$$(10) \quad \lim_{\rho \rightarrow r_0} \frac{\partial H}{\partial \rho} = G(\phi) \quad (\rho > r_0).$$

A verificação da fórmula (8) e os casos especiais da fórmula (3) que se aplicam a regiões semicirculares são deixados para os exercícios.

105. Um Problema de Neumann para o Semiplano. Seja $g(x)$ contínua para todo real x , exceto para, no máximo, um número finito de saltos finitos, satisfazendo à propriedade

$$(1) \quad |x^k g(x)| < M \quad (k > 1, -\infty < x < \infty).$$

Se $z = x + iy$, para cada x' fixado a função $\text{Log}|z - x'|$ é harmônica no semiplano $y > 0$. Conseqüentemente, a função

$$(2) \quad \begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Log}|z - x'| g(x') dx' + B \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Log}[(x' - x)^2 + y^2] g(x') dx' + B \end{aligned} \quad (y > 0),$$

onde B é uma constante real, é harmônica nesse semiplano.

A fórmula (2) foi escrita tendo-se em mente a fórmula de Schwarz (1) da Sec. 103, pois decorre de (2) que

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(x')}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \quad (y > 0).$$

De acordo com as equações (1) e (2), Sec. 103, portanto,

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y} = g(x) \quad (y > 0)$$

em cada ponto x onde g é contínua.

A fórmula integral (2) resolve, portanto, um *problema de Neumann para o semiplano* $y > 0$ com a condição de contorno (4). Mas ainda não demos condições sobre g , que fazem com que a função harmônica U permaneça limitada quando $|z|$ cresce.

Quando g é uma função ímpar, a fórmula (2) pode ser escrita

$$(5) \quad U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \text{Log} \frac{(x' - x)^2 + y^2}{(x' + x)^2 + y^2} g(x') dx' \quad (x \geq 0, y > 0).$$

Esta representa uma função harmônica no primeiro *quadrante* satisfazendo às condições

$$(6) \quad U(0, y) = 0 \quad (y > 0).$$

$$(7) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y} = g(x) \quad (x > 0, y > 0).$$

Os núcleos de todas as fórmulas integrais para funções harmônicas apresentadas neste capítulo podem ser descritos em termos de uma única função real de x , y , x' e y' , a saber,

$$(8) \quad R(z, z') = \text{Log}|z - z'| \quad (z \neq z').$$

Esta é a *função de Green* para o potencial logarítmico no plano- z . A função é simétrica: $R(z', z) = R(z, z')$. Expressões para núcleos anteriormente usados, em termos de R e suas derivações, são dadas nos exercícios.

EXERCÍCIOS

1. Como um caso particular da fórmula (1), Sec. 103, obtenha a fórmula

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(x' - x)^2 + y^2} - \frac{1}{(x' + x)^2 + y^2} \right] F(x') dx' \quad (x \geq 0, y > 0)$$

para uma função harmônica limitada U no primeiro *quadrante* que satisfaz às condições de contorno

$$\begin{aligned} U(0, y) &= 0 & (y > 0), \\ U(x, +0) &= F(x) & (x > 0, x \neq x_n), \end{aligned}$$

onde F é limitada para todo x positivo e contínua, exceto, no máximo, em um número finito de saltos finitos nos pontos x_n .

2. Como caso particular da fórmula (1), Sec. 103, obtenha a fórmula

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(x' - x)^2 + y^2} + \frac{1}{(x' + x)^2 + y^2} \right] F(x') dx' \quad (x \geq 0, y > 0)$$

para uma função harmônica limitada U no primeiro *quadrante* que satisfaz às condições de contorno

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{quando} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y > 0,$$

$$U(x, +x) = F(x) \quad (x > 0, x \neq x_n),$$

onde F é limitada para todo x positivo e contínua, exceto, possivelmente, para saltos finitos num número finito de pontos x_n .

3. A fim de usar valores principais $-\pi/2 \leq \operatorname{arctg} t \leq \pi/2$ do arco-tangente, permute o eixo- x e o eixo- y na Sec. 103 para escrever a solução

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xF(y')}{(y' - y)^2 + x^2} dy' \quad (x > 0)$$

do problema de Dirichlet para o semiplano $x > 0$. Se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} U(x, y) &= 1 & \text{quando } -1 < y < 1, \\ &= 0 & \text{quando } |y| > 1, \end{aligned}$$

onde $x > 0$, obtenha as seguintes fórmulas para U e para sua conjugada harmônica V :

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y+1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y-1}{x} \right),$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Mostre também que $\pi(V + iU) = \operatorname{Log}(z + i) - \operatorname{Log}(z - i)$.

4. Denotemos por $T(x, y)$ as temperaturas estacionárias limitadas numa placa $x > 0, y > 0$, com faces isoladas quando $T \rightarrow F(x)$ ($y \rightarrow 0$) e $T \rightarrow G(y)$ ($x \rightarrow 0$) (Fig. 100), onde F e G são limitadas e contínuas, exceto, possivelmente, para um número finito de saltos finitos. Se $x + iy = z$, mostre, com o auxílio da fórmula no exercício 1, que

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \quad (x > 0, y > 0),$$

onde

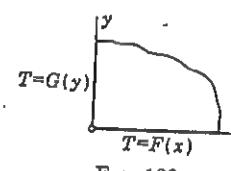


FIG. 100

5. Estabeleça a fórmula (8) da Sec. 104 como solução do problema de Neumann para o domínio exterior a um círculo, com o auxílio dos resultados anteriores obtidos nessa seção.

6. Como um caso particular da fórmula (3), Sec. 104, obtenha a fórmula

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, r, \theta' - \theta) - Q(r_0, r, \theta' + \theta)] g(\theta') d\theta'$$

para a função harmônica u na região semicircular $r < r_0, 0 \leq \theta \leq \pi$, tal que $u = 0$ sobre o diâmetro que faz parte da fronteira e

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \quad (r < r_0, 0 < \theta < \pi).$$

7. Como caso especial da fórmula (3), Sec. 104, obtenha a fórmula

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, \theta' - \theta) + Q(r_0, r, \theta' + \theta)] g(\theta') d\theta' + u_0$$

para a função harmônica u na região semicircular $r < r_0, 0 \leq \theta \leq \pi$, se $\partial u / \partial \theta = 0$ sobre o diâmetro fronteira e $\partial u / \partial r \rightarrow g(\theta)$ quando $r \rightarrow r_0$, onde $\int_0^\pi g(\theta) d\theta = 0$.

8. Indiquemos por $T(x, y)$ indicando as temperaturas estacionárias numa placa $x > 0, y > 0$. As faces da placa são isoladas, e $T = 0$ sobre a borda $x = 0$. O fluxo de calor para dentro da placa ao longo do segmento $0 < x < 1$ da borda $y = 0$ é uma constante A , e o resto dessa borda ($x > 1$) é isolado. Use a fórmula (5) da Sec. 105 para mostrar que o fluxo para fora da placa ao longo da borda $x = 0$ é

$$\frac{A}{\pi} \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{y^2} \right).$$

9. Mostre que o núcleo de Poisson é dado em termos da função de Green

$$R(z, z') = \operatorname{Log} |z - z'| = \frac{1}{2} \operatorname{Log} [r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta' - \theta) + r^2],$$

quando $z' = r_0 \exp(i\theta')$, pela equação

$$P(r_0, r, \theta' - \theta) = 2r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} - 1.$$

10. Mostre que o núcleo usado na Sec. 102 para representar u no semiplano $y > 0$ pode ser escrito em termos da função de Green nas formas

$$\frac{y}{|x' - z|^2} = \left[\frac{\partial}{\partial y} R(z, x') - \frac{\partial}{\partial y'} R(z, z') \right]_{y'} = 0$$

CAPÍTULO 12

Complementos sobre
Teoria das Funções

A teoria das funções analíticas apresentada nos capítulos anteriores é introdutória, muito embora auto-suficiente. Muitos tópicos não essenciais à continuidade da apresentação foram omitidos, conquanto alguns deles mereçam lugar num curso introdutório, devido à sua importância no contexto geral. Apresentaremos alguns desses tópicos neste capítulo.

A. PROLONGAMENTO ANALÍTICO

106. **Condições sob as Quais $f(z) \equiv 0$.** Na Sec. 65 mostramos que os zeros de uma função analítica são isolados, a menos que a função seja identicamente nula. Isto é, se a função f é analítica em z_0 , então existe uma vizinhança N de z_0 , tal que ou $f(z) \equiv 0$ em N ou f não tem zeros em N , exceto, possivelmente, no próprio ponto z_0 .

Suponhamos que exista um conjunto infinito de pontos z , tais que $f(z) = 0$ e que esse conjunto tenha z_0 como ponto de acumulação. Então, toda vizinhança de z_0 contém zeros da função f e, se f é analítica em z_0 , segue-se que existe alguma vizinhança de z_0 onde f se anula. Todos os coeficientes $f(z_0), f^{(n)}(z_0)/n!$ na série de Taylor para $f(z)$ em potências de $(z - z_0)$, portanto, se anulam. Assim, $f(z) = 0$ em todos os pontos interiores ao círculo $|z - z_0| = r_0$ se f é analítica no interior desse círculo. Aqui r_0 não é necessariamente pequeno.

Em particular, se f se anula em todos os pontos de um arco contendo z_0 , ou em todos os pontos de algum domínio que contém z_0 , e se f é analítica para $|z - z_0| < r_0$, então f é identicamente nula na vizinhança $|z - z_0| < r_0$.

Consideremos agora domínios ao invés de vizinhanças.

Teorema. *Se f é analítica num domínio D e se se anula em todo um domínio D_0 interior a D , então $f(z) = 0$ em todo ponto de D .*

Sejam t_0 e t_n dois números complexos representando dois pontos quaisquer do domínio D . Como D , por ser um domínio, é uma região aberta e conexa, existe uma cadeia contínua C de segmentos de reta contidos no interior de D que liga os pontos t_0 e t_n (Fig. 101), onde o número dos segmentos é finito.

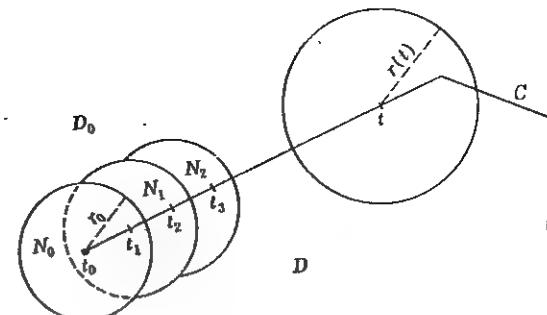


FIG. 101

Como a função f é analítica em cada ponto $z = t$ de C , seu desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto t tem um raio de convergência positivo $r(t)$. Convencionemos que $r(t)$ será substituído pela unidade sempre que o raio de convergência for maior do que a unidade; deste modo, $0 < r(t) \leq 1$. Note que o círculo de convergência $|z - t| = r(t)$ pode ser estendido além de D .

Para mostrar que r é uma função contínua de t , seja $t + h$ um outro ponto sobre C , onde $|h| < r(t)$, e considere o círculo de convergência $|z - (t + h)| = r(t + h)$ da série de Taylor para f em torno do ponto $t + h$. Ora, f é analítica quando

$$|z - (t + h)| < r(t) - |h|,$$

pois esta vizinhança é interior ao círculo com centro em t (Fig. 102). Portanto, $r(t + h) \geq r(t) - |h|$, isto é,

$$(1) \quad r(t + h) - r(t) \geq -|h|,$$

condição que é trivial quando $r(t + h) \geq r(t)$. No caso em que

$$r(t + h) < r(t),$$

a condição (1) pode ser escrita

$$(2) \quad |r(t + h) - r(t)| \leq |h|.$$

No caso em que $r(t + h) \geq r(t)$, então f é analítica na vizinhança

$$|z - t| < r(t + h) - |h|,$$

que é interior ao círculo de convergência em torno de $t + h$; logo, $r(t) \geq r(t + h) - |h|$, e de novo a condição (2) é satisfeita.

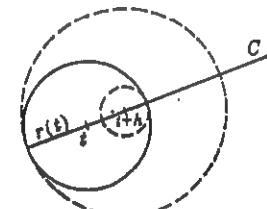


FIG. 102

Para cada número positivo pequeno ϵ , o primeiro membro da desigualdade (2) é menor do que ϵ quando $|h| < \epsilon$. Assim, r é uma função contínua de t sobre C . É também uma função contínua da variável real s , comprimento de arco ao longo de C de t_0 a t . Como r é contínuo e positivo para todo s num intervalo fechado finito, deve-se tomar um valor mínimo positivo r_0 para todos os pontos de C .

Seja, agora t_0 um ponto do domínio D_0 e seja t_n um ponto qualquer de D que não pertença a D_0 . Como f é identicamente nula em D_0 , f se anula numa vizinhança de t_0 . De fato, f deve anular-se em toda a vizinhança $|z - t_0| < r_0$, indicada por N_0 , uma vez que f é analítica em N_0 e se anula sobre um domínio que contenha t_0 .

Considere uma seqüência de pontos t_0, t_1, \dots, t_n sobre C tais que

$$\frac{1}{2}r_0 \leq |t_j - t_{j-1}| < r_0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

e a vizinhança N_j de cada ponto t_j , de raio r_0 , tal como indicada na Fig. 101. Como o centro t_1 de N_1 se situa em N_0 , onde f é identicamente nula, $f(z) = 0$ em N_1 . Da mesma maneira, o centro de N_2 pertence a N_1 , de modo que f se anula em N_2 , etc., até que se chegue a N_n . Assim, $f(t_n) = 0$ e a demonstração do teorema está completa.

107. Permanência de Formas de Identidades Funcionais. Como foi observado acima, se uma função é analítica num domínio D , e se anula ao longo de um arco em D , ela é nula sobre uma vizinhança de cada ponto do arco. De acordo com o teorema precedente, a função, portanto, se anula em todo o domínio D .

Se duas funções f_1 e f_2 têm um domínio de analiticidade em comum e se $f_1(z) = f_2(z)$ em cada ponto de algum arco nesse domínio, então a diferença $f = f_1 - f_2$ é analítica no domínio e se anula ao longo do arco. Assim, em todo o domínio, $f = 0$, isto é, $f_1 = f_2$. Este resultado pode ser enunciado como segue.

Teorema 1. *Uma função que é analítica num domínio D fica univocamente determinada sobre D pelos valores que ela toma nos pontos de um arco ou de um domínio interior a D .*

Como ilustração, a função $\exp z$ é a única função inteira que pode assumir os valores e^x ao longo de um segmento do eixo real. Além disso, como $e^x e^{-x} = 1$ para todo x real e $\exp z$ e $\exp(-z)$ são funções inteiras, a função

$$\exp z - \exp(-z) = 1$$

é uma função inteira que se anula ao longo do eixo real; ela se anula portanto em todo o plano complexo. Assim, a identidade $\exp(-z) = 1/\exp z$ para todo número complexo z , decorre da identidade quando z é real e da analiticidade das funções.

Da mesma maneira, a identidade $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ pode ser deduzida a partir da identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. A permanência de formas de outras

identidades entre funções é estabelecida de modo análogo. Vamos limitar nossa atenção a uma classe importante de identidades que envolvem somente polinômios nas funções.

Teorema 2. *Seja $P(f_1, f_2, \dots, f_n)$ um polinômio nas n variáveis f_j , onde f_j são funções analíticas de z num domínio que contém algum intervalo $a < x < b$ do eixo real. Se nesse intervalo as funções satisfazem à identidade*

$$(1) \quad P[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0 \quad (a < x < b)$$

então para todo z no domínio é válido.

$$(2) \quad P[f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)] = 0.$$

O primeiro membro da fórmula (2) é uma função analítica de z no domínio dado e se anula sobre um arco nesse domínio, em virtude da condição (1). Logo (2) é uma identidade que se verifica em todo o domínio.

108. Unicidade de Prolongamento Analítico. A intersecção de dois domínios D_1 e D_2 é o domínio $D_1 D_2$, consistindo de todos os pontos comuns a ambos os domínios. Se os dois domínios se interceptam (se superpõem), então, a totalidade dos pontos que pertencem a menos a um dos domínios também constitui um domínio. O novo domínio é chamado *reunião*, $D_1 + D_2$, de D_1 e D_2 .

Dados dois domínios D_1 e D_2 que se interceptam (Fig. 103) e uma função f_1 analítica em D_1 , pode existir uma função f_2 analítica em D_2 e é igual a f_1 em cada ponto da intersecção $D_1 D_2$. Se assim for, diremos que f_2 é o prolongamento analítico de f_1 ao domínio D_2 .

Se existe tal prolongamento f_2 , ele é único por força do Teorema 1 da seção precedente, pois nenhuma outra função pode ser analítica em D_2 e assumir o valor $f_1(z)$ em cada ponto z do domínio $D_1 D_2$ interior a D_2 . Entretanto, se existe um prolongamento analítico f_3 de f_2 de D_2 para um domínio D_3 que intercepta D_1 , como ilustrado na figura, não é necessário que se tenha $f_3 = f_1$ em $D_1 D_3$. Na seção seguinte vamos ilustrar o fato de que uma cadeia de prolongamento de uma função dada de um domínio D_1 , pode levar-nos a uma função diferente definida em D_1 .

Se f_2 é o prolongamento analítico de f_1 de um domínio D_1 em outro domínio D_2 que intercepta o primeiro, então a função F definida por

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{quando } z \text{ está em } D_1, \\ f_2(z) & \text{quando } z \text{ está em } D_2, \end{cases}$$

é analítica na reunião $D_1 + D_2$. As funções f_1 e f_2 , então, se dizem *elementos* de F , e a função F é o prolongamento analítico a $D_1 + D_2$ de f_1 ou de f_2 .

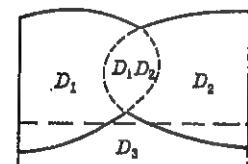


FIG. 103

109. Exemplos. Como primeiro exemplo, vamos considerar a função f_1 definida pela fórmula

$$(1) \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

A série de potências aqui converge se, e somente se, $|z| < 1$. É o desenvolvimento em série de Maclaurin da função $(1 - z)^{-1}$; assim,

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z} \quad \text{quando } |z| < 1,$$

mas f_1 não está definida quando $|z| \geq 1$. Ora, a função

$$(2) \quad F(z) = \frac{1}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

é definida e analítica em todos os pontos, exceto no ponto $z = 1$.

Como ela é idêntica a f_1 no interior do círculo $|z| = 1$, ela representa o prolongamento analítico de f_1 fora daquela região, sempre que $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$. Este é o único prolongamento analítico possível de f_1 além do círculo unitário, de acordo com os resultados obtidos na seção precedente. Neste caso f_1 é um elemento da função F definida por (2).

É de interesse notar que, se partimos da informação de que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge e representa uma função analítica de z quando $|z| < 1$ e sua soma é $(1 - x)^{-1}$ quando $z = x$, então podemos concluir que a soma é $(1 - z)^{-1}$ quando $|z| < 1$, uma vez que a função $(1 - z)^{-1}$ é a função analítica no interior do círculo, que toma os valores $(1 - x)^{-1}$ ao longo do segmento de eixo- x contido no círculo.

Consideremos a função

$$(3) \quad g_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt.$$

como outra ilustração de prolongamento analítico. Como $-z^{-1} \exp(-zt)$ é uma integral indefinida do integrando,

$$(4) \quad g_1(z) = -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{z} \quad \text{quando } x > 0.$$

Assim, g_1 é definida somente no domínio $x > 0$ indicado por D_1 na Fig. 104.

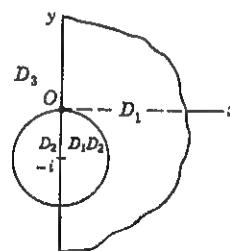


FIG. 104

Ela é analítica aí. Seja g_2 a função definida pela série geométrica seguinte:

$$(5) \quad g_2(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{i} \right)^n \quad (|z+i| < 1).$$

A série converge para $1/z$ no interior do círculo unitário com centro no ponto $z = -i$, seu círculo de convergência:

$$(6) \quad g_2(z) = i \frac{1}{1 - (z+i)/i} = \frac{1}{z}$$

quando z está em D_2 , onde D_2 é o domínio $|z+i| < 1$. Deste modo, $g_2 = g_1$ na intersecção $D_1 \cap D_2$, e g_2 é o prolongamento analítico de g_1 a D_2 .

A função $G(z) = 1/z$ ($z \neq 0$) é o prolongamento analítico de ambas as funções g_1 e g_2 ao domínio D_3 , que consiste de todos os pontos do plano- z exceto a origem. As funções g_1 e g_2 são elementos de G .

Por último, vamos considerar o seguinte ramo de $z^{1/2}$:

$$h_1(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, 0 < \theta < \pi).$$

Seu prolongamento analítico h_2 através do semi-eixo real negativo para o semi-plano inferior pode ser escrito.

$$h_2(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi).$$

O prolongamento analítico de h_2 , através do semi-eixo real positivo para o primeiro quadrante é descrito pelas condições

$$h_3(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2}).$$

Assim, $h_3 \neq h_1$ no primeiro quadrante; de fato, $h_3(z) = -h_1(z)$ aí.

110. O Princípio da Reflexão. No capítulo 3 observarmos que certas funções elementares $w = f(z)$ possuem a propriedade de que $\bar{w} = f(\bar{z})$, e outras não. Como exemplos daquelas que gozam da propriedade, podemos citar as funções

$$z, \quad z^2 + 1, \quad e^z, \quad \operatorname{sen} z,$$

pois quando z é substituído pelo seu conjugado, o valor de cada uma das funções acima muda para o conjugado do valor original. Por outro lado, as funções

$$iz, \quad z^2 + i, \quad e^{iz}, \quad (1+i)\operatorname{sen} z$$

não satisfazem à propriedade de que a reflexão de z no eixo real corresponda à reflexão de w no eixo real.

O seguinte teorema mostra que uma função analítica satisfaz a este princípio da reflexão se, e somente se, a função é real quando z é real.

Teorema. Seja f uma função analítica num domínio D que contém um segmento do eixo- x e é simétrico em relação ao eixo- x . Se $f(x)$ é real sempre que x é um ponto desse segmento, então

$$(1) \quad f(\bar{z}) = \bar{f(z)}$$

para todo z em D . Reciprocamente, se a condição (1) é satisfeita, então $f(x)$ é real.

A condição (1) é a mesma que

$$(2) \quad \bar{f(\bar{z})} = f(z),$$

onde, se $f = u + iv$,

$$(3) \quad \bar{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

Se a condição (2) é satisfeita num ponto x do eixo real, então

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0) = u(x, 0) - iv(x, 0);$$

conseqüentemente, $v(x, 0) = 0$ e $f(x)$ é real. A recíproca no teorema, portanto, está demonstrada.

Para mostrar a afirmação direta do teorema, vamos provar primeiro que a função $\bar{f(\bar{z})}$ é analítica em todo o domínio D . Escrevemos

$$F(z) = \bar{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y).$$

Então, de acordo com (3),

$$(4) \quad U(x, y) = u(x, \eta), \quad V(x, y) = -v(x, \eta), \quad \text{onde} \quad \eta = -y.$$

Como $f(x + i\eta)$ é uma função analítica de $x + i\eta$ em D , as funções $u(x, \eta)$, $v(x, \eta)$ e suas derivadas parciais são contínuas e satisfazem às condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

em todo o domínio D . Ora, em vista de (4), vemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

e, portanto, $\partial U/\partial x = \partial V/\partial y$. De modo análogo, obtemos a relação

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

onde decorre que a função F é analítica no domínio D .

Como $f(x)$ é real, $v(x, 0) = 0$, e, portanto,

$$F(x) = U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0);$$

isto é, $F(z) = f(z)$ quando o ponto z está sobre o segmento do eixo- x contido no domínio. Segue-se do Teorema 1 da Sec. 107 que $F(z) = f(z)$ em cada ponto z de D , visto que ambas as funções são analíticas aí. Desta maneira, a condição (2) está estabelecida e a demonstração do teorema completa.

EXERCÍCIOS

1. Sabendo que a função exponencial, as funções seno e cosseno hiperbólicas e as funções seno e co-seno são todas inteiras, use o Teorema 2 da Sec. 107 para deduzir cada uma das seguintes identidades, que são válidas para todo complexo z , a partir das identidades correspondentes quando z é real:

(a) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = e^z$; (b) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \operatorname{cos} z$;
 (c) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; (d) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{cos} z$.

2. Mostre que a função

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (z \neq i, z \neq -i)$$

é o prolongamento analítico da função

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

à região além do interior do círculo unitário $|z| = 1$.

3. Mostre que a função z^{-2} representa o prolongamento analítico da função definida pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

à região além do interior do círculo $|z+1| = 1$.

4. Diga por que o prolongamento analítico da função (Sec. 109)

$$h_1(z) \approx \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, 0 < \theta < \pi),$$

através do semi-eixo real positivo ao semiplano inferior é a seguinte função: $\sqrt{r} \exp(i\theta/2)$, onde $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$.

5. Determine o prolongamento analítico de $\text{Log } z$ do semiplano superior $y > 0$ ao inferior através do eixo real negativo. Note que este prolongamento analítico é diferente de $\text{Log } z$ no semiplano inferior.

Resp. $\text{Log } r + i\theta$ ($r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$).

6. Determine o prolongamento analítico da função

$$f(z) = \int_0^{\infty} te^{-zt} dt$$

na região à esquerda do semiplano $x > 0$.

Resp. z^{-2} .

7. Sendo k uma constante real, mostre que o prolongamento analítico da função

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \sin kt dt \quad (z > 0)$$

tem pólos simples nos pontos $z = \pm ik$.

8. No teorema da Sec. 110, mostre que, se a condição de que $f(x)$ seja real é substituída pela de que $f(x)$ tome valores imaginários puros, a conclusão muda para $\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$.

9. Seja S um subconjunto de um domínio D que tem um ponto de acumulação em D . Generalize o Teorema 1 da Sec. 107, mostrando que uma função analítica em D é univocamente determinada pelos valores que ela toma nos pontos de S .

B. PONTOS SINGULARES E ZEROS

Faremos aqui uma análise mais aprofundada do comportamento de funções na proximidade de seus pontos singulares.

111. Pólos e Zeros. Foi salientado na Sec. 68 que, se z_0 é pôlo de qualquer ordem de uma função f , então

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty;$$

isto é, dado um número real M , existe um número positivo δ_M tal que

$$(2) \quad |f(z)| > M \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_M.$$

Como consequência, existe alguma vizinhança de cada pôlo sem função.

Como os pólos são pontos singulares isolados, pode-se afirmar que *alguma vizinhança de cada pôlo z_0 não contém zero nem ponto singular distinto de z_0* .

De acordo com o exercício 9, Sec. 69, se z_0 é um zero de ordem m de uma função f , então z_0 é um pôlo de ordem m da função $1/f$. A recíproca é facilmente estabelecida. Com efeito, se z_0 é um pôlo de ordem m de uma função g , então a função $(z - z_0)^m g(z)$ tem um ponto singular removível em z_0 ; de fato, o valor da última função pode ser definido em z_0 como sendo um número conveniente, *diferente de zero*, de modo que a função seja analítica aí. Seja ϕ essa função:

$$(3) \quad \begin{aligned} \phi(z) &= (z - z_0)^m g(z) & \text{quando } 0 < |z - z_0| < r_0, \\ &= \phi(z_0) \neq 0 & \text{quando } z = z_0. \end{aligned}$$

Então $1/\phi$ é analítica em z_0 , e para algum número positivo r_1 , a função é representada pela série de Taylor

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < r_1),$$

onde $r_1 \leq r_0$ e $a_0 = 1/\phi(z_0) \neq 0$. Segue-se de (3) que

$$(4) \quad \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < r_1).$$

Portanto, se z_0 é um pôlo de ordem m de uma função, então z_0 é um zero de ordem m da função $1/g$.

Em contraste com a condição (2), suponhamos f limitada e analítica quando $0 < |z - z_0| < r_0$. Então temos o seguinte teorema devido a Riemann.

Teorema. Seja f analítica num domínio $0 < |z - z_0| < r_0$ e limitada aí, isto é, para alguma constante M

$$|f(z)| < M \quad (0 < |z - z_0| < r_0),$$

então f é analítica em z_0 ou z_0 é um ponto singular removível da função.

A função é representada por sua série de Laurent no domínio em torno de z_0 . Se C é um círculo $|z - z_0| = r_1$, onde $r_1 < r_0$, os coeficientes A_{-n} de $(z - z_0)^{-n}$ nessa série são (Sec. 58)

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} = \frac{r_1^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta,$$

onde $n = 1, 2, \dots$. Logo

$$|A_{-n}| < Mr_1^n \quad (r_1 < r_0).$$

Mas os coeficientes são constantes e, como r_1 pode ser tomado arbitrariamente pequeno, $A_{-n} = 0$ quando $n = 1, 2, \dots$. Assim, a série de Laurent reduz-se à série de Taylor e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < r_0).$$

Se $f(z_0)$ é definida como sendo o número A_0 , então f é analítica em z_0 . A demonstração do teorema está completa.

112. Pontos Singulares Essenciais. O comportamento de uma função na proximidade de um ponto singular essencial é um tanto irregular, como mostra o seguinte teorema de Weierstrass.

Teorema. Seja z_0 um ponto singular essencial de uma função f e seja c um número complexo qualquer. Então, para cada número positivo ϵ , arbitrariamente pequeno, a desigualdade

$$(1) \quad |f(z) - c| < \epsilon$$

é satisfeita em algum ponto z ($z \neq z_0$) em cada vizinhança de z_0 .

O teorema nos diz que o valor de f é arbitrariamente próximo de qualquer número prescrito c , em pontos arbitrariamente próximos de um ponto singular essencial. Um exame da função $\exp(1/z)$, a qual tem um ponto singular essencial na origem, ilustra tal comportamento quando o ponto z se aproxima da origem ao longo de diferentes raios (ver também o exercício 1, Sec. 113).

Para a demonstração do teorema, vamos supor que a condição (1) não é satisfeita em nenhum ponto de uma vizinhança $|z - z_0| < r_0$, onde r_0 é suficientemente pequeno para que f seja analítica no domínio $0 < |z - z_0| < r_0$. Então $|f(z) - c| \geq \epsilon$ para todos os pontos desse domínio, e a função

$$(2) \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - c} \quad (0 < |z - z_0| < r_0)$$

é analítica e limitada. De acordo com o teorema de Riemann (Sec. 111), z_0 é um ponto singular removível de g . Seja $g(z_0)$ definida de modo que g seja analítica em z_0 . Como f não pode ser constante, g não é constante e, de acordo com a série de Taylor, ou $g(z_0) \neq 0$ ou g tem um zero de ordem finita em z_0 . Logo sua recíproca

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - c$$

ou é analítica em z_0 , ou aí tem um pôlo. Mas isto contradiz a hipótese de que z_0 é um ponto singular essencial de f . Portanto, a condição (1) deve ser satisfeita em algum ponto.

113. O Número de Zeros e Pôlos. As propriedades da derivada logarítmica obtidas nos exercícios 10, Sec. 69, e 9, Sec. 95, podem ser generalizadas.

Seja f uma função analítica no interior de C e sobre um caminho fechado C , exceto, no máximo, num número finito de pôlos interiores a C . Suponhamos que f não tenha zeros sobre C e tenha no máximo um número finito de zeros interiores a C . Então, se C é percorrido no sentido positivo, vale

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_p,$$

onde N_0 é o número total de zeros de f interiores a C , sendo um zero de ordem m_0 contado m_0 vezes, e N_p é o número total dos pôlos de f interiores a C , contado m_p vezes um pôlo de ordem m_p .

Para a demonstração da fórmula (1), vamos mostrar que o inteiro $N_0 - N_p$ é a soma dos resíduos da função f'/f nos pontos singulares interiores ao caminho fechado. Esses pontos consistem dos zeros e dos pôlos de f interiores a C .

Se z_0 é um zero de f , então em alguma vizinhança de z_0

$$(2) \quad f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \quad [g(z_0) \neq 0],$$

onde m_0 é a ordem desse zero e g é uma função analítica na vizinhança. Portanto

$$f'(z) = m_0(z - z_0)^{m_0-1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como g'/g é analítica em z_0 , a função f'/f tem um pôlo simples em z_0 com resíduo m_0 . A soma dos resíduos de f'/f nos zeros de f interiores a C é portanto o inteiro N_0 .

Se z_p é um pôlo de f , de ordem m_p , a função

$$(3) \quad h(z) = (z - z_p)^{m_p} f(z)$$

pode ser definida em z_p de modo a se tornar analítica aí; além disso, esse número $h(z_p)$ é diferente de zero. Assim, em alguma vizinhança de z_p , exceto no próprio ponto $z = z_p$,

$$(4) \quad f(z) = (z - z_p)^{-m_p} h(z), \quad \text{onde } h(z_p) \neq 0,$$

$$\text{e } f'(z) = -m_p(z - z_p)^{-m_p-1} h(z) + (z - z_p)^{-m_p} h'(z).$$

$$\text{Portanto, } \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_p}{z - z_p} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

e vemos que f'/f tem um pôlo simples em z_p com resíduo $-m_p$. Logo, a soma dos resíduos de f'/f nos pôlos de f interiores a C é o inteiro $-N_p$. A fórmula (1) está, pois, estabelecida.

O teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser enunciado como segue. Um conjunto de infinitos pontos, todos pertencentes a uma região fechada e limitada, tem no mínimo um ponto de acumulação nessa região. A demonstração pode ser feita selecionando-se uma seqüência infinita de pontos z_1, z_2, \dots do conjunto e aplicando-se à seqüência um processo, o de dividir quadrados, empregado no exercício 13, Sec. 50.

Em vista do teorema acima, as condições usadas na demonstração da fórmula (1) podem ser relaxadas. Com efeito, o número de zeros e pólos interiores ao caminho fechado deve ser necessariamente finito se a função f deve ser analítica no interior de ϵ e sobre C , exceto, possivelmente, nos pólos interiores a C , visto que zeros e pólos são isolados. Os detalhes são deixados como exercício.

A função $\log f$ é uma integral indefinida de f'/f . Como $\text{Log } |f(z)|$ retorna a seu valor inicial quando o ponto z completa uma volta ao longo do caminho fechado C , fica claro que o valor da integral na fórmula (1) é determinado pela mudança em valor de $i\phi$, onde $\phi = \arg f(z)$:

$$(5) \quad \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \phi,$$

onde $\Delta_C \phi$ é a mudança em número de radianos no ângulo contínuo ϕ , quando o ponto z completa uma volta ao longo de C no sentido positivo. Assim, a fórmula (1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \Delta_C [\arg f(z)] = N_0 - N_p.$$

conhecida como *princípio do argumento*.

EXERCÍCIOS

1. Seja $c = c_0 \exp(i\gamma)$, onde $c_0 > 0$ é um número complexo fixado distinto de zero. Mostre que a função $\exp(1/z)$, que tem um ponto singular essencial em $z = 0$, toma o valor c nos pontos $z = r \exp(i\theta)$, onde r e θ satisfazem às equações

$$r^2 = \frac{1}{\gamma^2 + (\text{Log } c_0)^2},$$

$$\text{sen } \theta = \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\text{Log } c_0)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{Log } c_0}{\sqrt{\gamma^2 + (\text{Log } c_0)^2}}.$$

Note que r pode ser arbitrariamente pequeno, somando-se múltiplos de 2π ao ângulo γ , sem alterar c .

2. Se uma função f é analítica quando $0 < |z - z_0| < r_0$ para algum número positivo r_0 e se z_0 é um ponto de acumulação de zeros da função, então z_0 é um ponto singular essencial de f , a menos que f seja identicamente nula. Demonstre este teorema com o auxílio dos resultados obtidos na Sec. 111.

3. Examine o conjunto dos zeros da função $z^2 \text{sen}(1/z)$ e aplique o teorema enunciado no exercício 2 para mostrar que a origem é um ponto singular essencial da função. Note que esta conclusão também decorre da natureza da série de Laurent, em potências de z , que representa a função no domínio $|z| > 0$.

4. Seja C um caminho fechado orientado no sentido positivo e seja w_0 um número complexo dado. Se uma função g é analítica no interior de ϵ e sobre C e $g'(z) \neq 0$ em cada ponto interior a C , e se $g(z) \neq w_0$ em cada ponto de C , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z) - w_0} dz = N,$$

onde o inteiro N é o número dos pontos interiores a C nos quais $g(z) = w_0$. Mostre como este resultado decorre dos resultados obtidos na Sec. 113. (Compare o resultado com os obtidos nos exercícios 9 e 10, Sec. 95.)

5. Complete o argumento (Sec. 113), baseado no teorema de Bolzano-Weierstrass, de que se uma função f é analítica no interior de ϵ e sobre um caminho fechado C , exceto, possivelmente, em pólos interiores a C , e se f não se anula em nenhum ponto de C , então os pólos e zeros de f interiores a C são em número finito, e a fórmula (1) é válida.

C. SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Uma superfície de Riemann é uma generalização do plano- z a uma superfície de mais de uma folha tal, que uma função multivalente tenha um só valor correspondente a cada ponto sobre essa superfície. Uma vez construída tal superfície para uma função multivalente, a função se torna univalente sobre a mesma, aplicando-se então a teoria das funções univalentes. Complexidades devidas à multivalência da função são assim “suavizadas” por um dispositivo geométrico. Entretanto, a descrição de tais superfícies e o arranjo de conexões apropriadas entre as folhas, podem tornar-se um tanto complicados. Vamos limitar nossa atenção a exemplos bastante simples.

114. Uma Superfície para a Função $\log z$. A cada ponto distinto da origem no plano- z , correspondem infinitos valores da função

$$\log z = \text{Log } r + i\theta.$$

A fim de descrever esta função como função univalente, vamos considerar, no lugar do plano- z , uma superfície sobre a qual um novo ponto é representado sempre que o argumento do ponto z é aumentado ou diminuído de 2π .

Consideremos o plano- z como sendo uma folha delgada R_0 , cortada ao longo do semi-eixo- x positivo. Sobre essa folha θ varia de 0 a 2π . Seja R_1 uma segunda folha, cortada da mesma maneira e colocada defrente da folha R_0 . A borda inferior do corte em R_0 é então colada à borda superior do corte em R_1 . Sobre R_1 , o ângulo θ varia de 2π a 4π , de modo que quando z representa um ponto de R_1 , a parte imaginária de $\log z$ tem um valor entre 2π e 4π .

Uma terceira folha R_2 é então cortada ao longo do semi-eixo- x positivo e colocada defrente de R_1 , e a borda inferior do corte em R_1 é colada à borda superior do corte nesta nova folha; e assim analogamente para R_3, R_4, \dots . Uma folha R_{-1} , sobre a qual θ varia de 0 a -2π , é cortada e colocada detrás de R_0 , com a borda inferior do corte colada à borda superior do corte em R_0 ; analogamente para a folha R_{-2} , etc. As coordenadas r e θ de um ponto sobre qualquer uma dessas folhas podem ser tomadas como as coordenadas polares da projeção do ponto sobre o plano- z original, com a exceção de que a coorde-

nada angular θ é restrita a um campo de variação de 2π radianos sobre cada folha. A origem é um ponto comum a todas as folhas.

Consideremos uma curva contínua qualquer sobre esta superfície conexa de infinitas folhas, uma curva que não passa pela origem. Quando o ponto z percorre essa curva, os valores da função $\log z$ variam continuamente, uma vez que θ varia continuamente e a função assume um e um só valor para cada ponto da curva. Quando o ponto completa uma volta em torno da origem na folha R_0 ao longo, por exemplo, do caminho indicado na Fig. 105, o ângulo varia de 0 a 2π . Ao atravessar a reta $\theta = 2\pi$ o ponto passa para a folha R_1 da superfície. Quando o ponto completa um ciclo em R_1 , o ângulo θ varia de 2π a 4π e, ao cruzar a reta $\theta = 4\pi$, o ponto passa para a folha R_2 .

A superfície descrita acima é uma superfície de Riemann para a função $\log z$, uma superfície conexa de infinitas folhas, arranjada de tal modo que esta função se torne uma função univalela dos pontos dessa superfície.

A transformação $w = \log z$ estabelece uma correspondência biunívoca entre toda essa superfície de Riemann, exceto o ponto de ramificação $z = 0$, e todo o plano- w . A imagem da folha R_0 é a faixa $0 \leq v \leq 2\pi$. Quando o ponto z passa para a folha R_1 ao longo do arco ilustrado na Fig. 106, sua imagem w atravessa a reta $v = 2\pi$, como indicado na figura.

Observe que a função w na faixa $2\pi \leq v < 4\pi$ representa o prolongamento analítico da função analítica univalela

$$\log r + i\theta \quad (0 < \theta < 2\pi),$$

através do semi-eixo- x positivo. Neste sentido, a função w é, não apenas uma função univalela de todos os pontos z sobre a superfície de Riemann, mas também uma função analítica em todos os pontos, exceto na origem.

As folhas poderiam ser cortadas ao longo do semi-eixo- x negativo, ou ao longo de qualquer semi-reta partindo da origem, e coladas de modo apropriado ao longo das aberturas de corte para formarem uma outra superfície de Riemann para a função $\log z$.

115. Uma Superfície para a Função $z^{1/2}$. A função

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

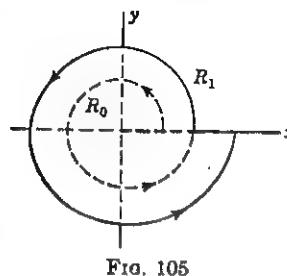


FIG. 105

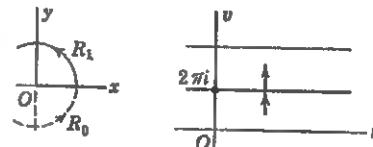


FIG. 106

toma dois valores para cada ponto distinto da origem no plano- z . Vamos substituir o plano por duas folhas R_0 e R_1 , cada uma das quais é cortada ao longo do semi-eixo- x positivo, com R_1 colocada defrente de R_0 . A borda inferior do corte em R_0 é colada à borda superior do corte em R_1 e a borda inferior do corte em R_1 à borda superior do corte em R_0 . As duas folhas cruzam-se portanto no corte.

Quando o ponto z descreve um circuito contínuo (Fig. 107) em volta da origem sobre essa superfície, o ângulo θ cresce de 0 a 2π , e então o ponto passa da folha R_0 para a folha R_1 , onde θ cresce de 2π a 4π . Se o ponto continua sua caminhada, ele volta para a folha R_0 , onde os valores de θ variam de 4π a 6π ou de 0 a 2π , escolha que não afeta o valor da função $z^{1/2}$, etc. A função é univalela sobre esta superfície (a menos de certo dispositivo mais artificial necessário para distinguir pontos das duas folhas ao longo do corte).

A imagem da folha R_0 desta superfície de Riemann para a função $z^{1/2}$ é o semiplano superior do plano- w , pois

$$w = \rho e^{i\phi} = \sqrt{r} e^{i\theta/2},$$

e $0 \leq \theta/2 \leq \pi$ sobre R_0 . A imagem da folha R_1 é o semiplano inferior do plano- w . Tal como definida sobre uma das folhas, a função é o prolongamento analítico, através do corte, da função definida sobre a outra. Neste respeito, a função univalela $z^{1/2}$ sobre a superfície de Riemann é analítica em todos os pontos, exceto na origem.

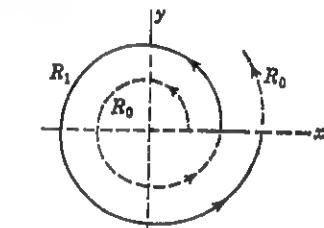


FIG. 107

116. Superfícies para Outras Funções Irracionais. Vamos descrever uma superfície de Riemann para a função bivalente

$$(1) \quad f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1 r_2} \exp \left(i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right),$$

onde $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ e $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$, como mostra a Fig. 23. Um ramo desta função cujo corte de ramo é o segmento $P_1 P_2$ entre os pontos de ramificação $z = \pm 1$, já foi descrito na Sec. 37. Esse ramo é dado pela fórmula (1) quando ambos θ_1 e θ_2 variam de 0 a 2π . Ele é descontínuo sobre o segmento $P_1 P_2$.

A superfície de Riemann para a função bivalente (1) deve consistir de duas folhas R_0 e R_1 . Sejam ambas as folhas cortadas ao longo do segmento $P_1 P_2$, e seja a borda inferior do corte em R_0 colada à borda superior do corte em R_1 e a borda inferior em R_1 à borda superior em R_0 . As duas folhas da superfície "contínua" assim formada cruzam-se ao longo do segmento. Um ponto sobre a superfície só pode passar de uma folha para a outra atravessando esse segmento.

Seja a folha R_0 tal que sobre ela cada um dos ângulos θ_1 e θ_2 tenha valores Θ_1 e Θ_2 variando de 0 a 2π . Em cada ponto sobre R_0 , porém, o valor

de ambos os ângulos pode ser aumentado ou diminuído de 2π , já que a função terá um mesmo valor que antes. Essa mudança em ângulos corresponde a um movimento do ponto z partindo da sua posição original ao longo de uma curva qualquer envolvendo o segmento P_1P_2 e voltando à posição original. Da mesma maneira, o valor de cada um dos θ_1 e θ_2 pode ser mudado de $\pm 4\pi$ se o outro ângulo não é alterado, sem alterar o valor de f . Essa mudança corresponde a mover o ponto z sobre uma curva, envolvendo um dos pontos de ramificação até completar duas voltas. Assim, para cada ponto de R_0 os ângulos θ_1 e θ_2 têm os valores

$$\theta_1 = \Theta_1 + 2\pi n_1, \quad \theta_2 = \Theta_2 + 2\pi n_2 \quad (0 \leq \Theta_j \leq 2\pi, j = 1, 2),$$

onde os inteiros n_1 e n_2 (positivos, negativos ou zero) são ambos pares ou ambos ímpares, de modo que a sua soma é par.

Se um dos inteiros n_1 ou n_2 é par e o outro ímpar, os ângulos

$$\theta_1 = \Theta_1 + 2\pi n_1, \quad \theta_2 = \Theta_2 + 2\pi n_2$$

são coordenadas de pontos sobre a folha R_1 . O ponto que tem as coordenadas $\theta_1 = 5\pi/2$, $\theta_2 = \pi/4$, por exemplo, está sobre R_1 .

A função (1) tem um e um só valor para cada ponto da superfície de Riemann, consistindo das duas folhas R_0 e R_1 , exceto quanto aos pontos do segmento P_1P_2 . Como as posições de todos os pontos de R_0 podem ser descritas com ângulos θ_1 e θ_2 variando de 0 a 2π , o argumento $(\theta_1 + \theta_2)/2$ de $f(z)$ varia de 0 a 2π . A transformação $w = f(z)$ leva a folha R_0 em todo o plano-w. A imagem da folha R_1 também é todo o plano-w.

Como outro exemplo, vamos considerar a função bivalente

$$(2) \quad g(z) = [z(z^2 - 1)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(i \frac{\theta + \theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

(Fig. 108). Os pontos $z = 0$ e $z = \pm 1$ são pontos de ramificação desta função. Observemos que, se o ponto z descreve um circuito que inclui todos os três pontos, o argumento de $g(z)$ varia de 3π , e portanto o valor da função é alterado. Por conseguinte, um corte de ramo deve emanar de um desses pontos de ramificação e ir até o infinito para descrever um ramo univalente de g . Assim, o ponto infinito é um ponto de ramificação, como podemos mostrar também escrevendo $z = 1/Z$ e notando que $g(1/Z)$ tem um ponto de ramificação em $Z = 0$.

Sejam duas folhas cortadas ao longo do segmento L_2 de $z = -1$ a $z = 0$ e ao longo da parte L_1 do eixo-x à direita do ponto $z = 1$. Sobre R_0 especificaremos que cada um dos três ângulos θ , θ_1 e θ_2 pode variar de 0 a 2π , e sobre R_1 de

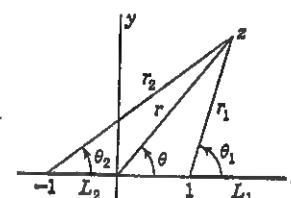


FIG. 108

2π a 4π ; além disso, os ângulos correspondentes a um ponto sobre qualquer uma das folhas podem ser aumentados ou diminuídos de múltiplos de 2π , de tal modo que a soma dos três ângulos varie de um múltiplo de 4π , o que não altera o valor da função g .

Se colamos as bordas dos cortes ao longo de L_1 e L_2 em cruz, isto é, se ao longo de L_1 colamos a borda inferior em R_0 à borda superior em R_1 , etc., de modo que sempre que um ponto atravessa L_1 ou L_2 o mesmo passa de uma folha para a outra, forma-se uma superfície de Riemann para a função g . O leitor pode verificar, com o auxílio da Fig. 108, que um ramo da função é representado por seus valores nos pontos sobre R_0 e o outro ramo nos pontos sobre R_1 , e que os valores mudam para os do outro ramo quando e somente quando o ponto atravessa L_1 ou L_2 .

EXERCÍCIOS

1. Descreva uma superfície de Riemann para a função trivalente

$$w = (z - 1)^{\frac{1}{3}},$$

e diga qual terça parte do plano-w representa a imagem de cada folha da superfície.
2. Descreva a imagem, sobre uma superfície de Riemann, do círculo $|w| = 1$ sob a transformação $w = z^{1/2}$.

3. Foi salientado na seção precedente que, embora um e único valor da função

$$w = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

corresponda a cada ponto z da superfície de Riemann, existem dois pontos z correspondentes a cada valor de w , em geral. Mostre numa outra maneira por que isto ocorre.
4. A cada ponto da superfície de Riemann, descrita na seção precedente para a função $w = g(z)$, corresponde um e um só valor de w . Mostre que para cada valor de w existem, em geral, três pontos sobre a superfície.

5. Descreva uma superfície de Riemann para a função

$$w = \left(\frac{z - 1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

6. Seja C o círculo $|z - 2| = 1$ sobre a superfície de Riemann descrita na Sec. 115 para a função $z^{1/2}$, onde o semicírculo superior do círculo se encontra na folha R_0 e o inferior em R_1 . Note que podemos escrever

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2}, \quad \text{onde } 4\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < 4\pi + \frac{\pi}{2},$$

para todo ponto de C . Mostre por que

$$\int_C z^{\frac{1}{2}} dz = 0.$$

Generalize este resultado para o caso de outras curvas fechadas que se passam de uma folha para a outra sem envolver os pontos de ramificação, e também para outras funções, estendendo assim o teorema de Cauchy-Goursat para integrais de funções multivalentes.
7. Note que a superfície de Riemann descrita na Sec. 116 para a função $(z^2 - 1)^{1/2}$ é também uma superfície de Riemann para a função w de z definida por qualquer uma das

equações

$$w = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}).$$

Se f_0 designa o ramo de $(z^2 - 1)^{1/2}$ definido sobre a folha R_0 , mostre que os ramos w_0 e w_1 de w sobre as duas folhas são dados pelas equações

$$w_0 = \frac{1}{w_1} = z + f_0(z).$$

8. No exercício 7, o ramo f_0 de $(z^2 - 1)^{1/2}$ pode ser descrito pela equação

$$f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i\theta_1}{2} \exp \frac{i\theta_2}{2},$$

onde θ_1 e θ_2 variam de 0 a 2π e

$$z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2).$$

Como $2z = r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2)$, mostre que o ramo w_0 da função $w = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ pode ser escrito na forma

$$w_0(z) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2} \right)^2.$$

Determine $w_0 \bar{w}_0$ e note que $r_1 + r_2 \geq 2$ e $\cos \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \geq 0$, para todo z , para provar que $|w_0(z)| \geq 1$. Mostre então que, sob a transformação $z = \frac{1}{2}(w + 1/w)$, a folha R_0 da superfície de Riemann z é transformada na região $|w| \geq 1$, a folha R_1 na região $|w| \leq 1$ e o corte de ramo entre os pontos $z = \pm 1$ no círculo $|w| = 1$ (compare com o exercício 14, Sec. 41).

APÊNDICE 1

Bibliografia

A seguinte lista de livros, para estudo suplementar da teoria das funções de uma variável complexa e das aplicações da teoria, não pretende ser completa. Outras referências podem ser encontradas em alguns dos livros abaixo relacionados.

TEORIA

Ahlfors, L. V.: "Complex Analysis," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
 Bieberbach, L.: "Conformal Mapping," Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
 ———: "Lehrbuch der Funktionentheorie," vols. 1 and 2, B.G. Teubner, Berlin, 1934.
 Caratheodory, C.: "Conformal Representation," Cambridge University Press, London, 1952.
 ———: "Theory of Functions of a Complex Variable," vols. 1 and 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
 Copson, E. T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1957.
 Dienes, P.: "The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," Dover Publications, New York, 1957.
 Evans, G. C.: "The Logarithmic Potential," American Mathematical Society, Providence, R. I., 1927.
 Forsyth, A. R.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Cambridge University Press, London, 1918.
 Hille, E.: "Analytic Function Theory," vol. 1, Ginn & Company, Boston, 1959.
 Hurwitz, A., and R. Courant: "Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen," Interscience Publishers, Inc., New York, 1944.
 Kellogg, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1929.
 Knopp, K.: "Elements of the Theory of Functions," Dover Publications, New York, 1952.
 MacRobert, T. M.: "Functions of a Complex Variable," Macmillan & Co., Ltd., London, 1954.
 Nehari, Z.: "Conformal Mapping," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
 Springer, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1957.
 Sternberg, W. J., and T. L. Smith: "Theory of Potential and Spherical Harmonics," University of Toronto Press, Toronto, 1944.
 Titchmarsh, E. C.: "Theory of Functions," Oxford University Press, London, 1939.
 Whittaker, E. T., and G. N. Watson: "Modern Analysis," Cambridge University Press, London, 1950.

APLICAÇÕES

Bowman, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.

Churchill, R. V.: "Operational Mathematics," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.

Glauert, H.: "The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory," Cambridge University Press, London, 1948.

Green, S. L.: "Hydro- and Aero-dynamics," Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1937.

Guillemin, E. A.: "The Mathematics of Circuit Analysis," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

Jeans, J. H.: "Mathematical Theory of Electricity and Magnetism," Cambridge University Press, London, 1925.

Kober, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, New York, 1952.

Lamb, H.: "Hydrodynamics," Dover Publications, New York, 1945.

Love, A. E. H.: "Elasticity," Dover Publications, New York, 1944.

Milne-Thomson, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," Macmillan & Co., Ltd., London, 1955.

Muskhelishvili, N. I.: "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," P. Noordhoff, N. V., Groningen Netherlands, 1953.

Oberhettinger, F., and W. Magnus: "Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1949.

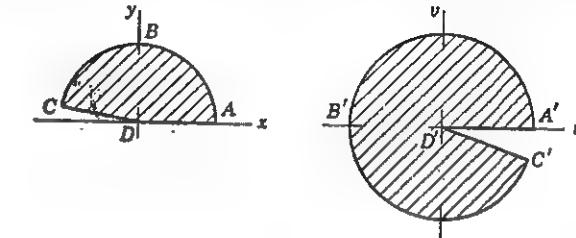
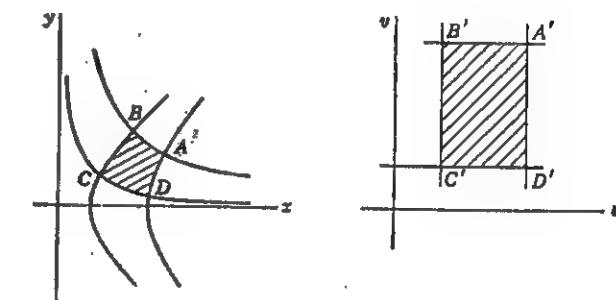
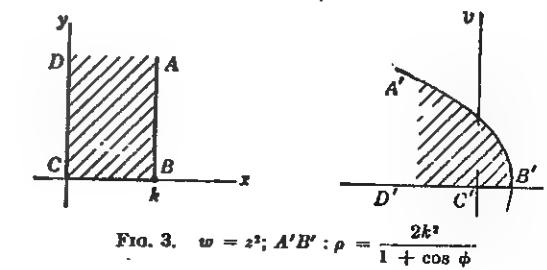
Rothe, R., F. Ollendorff, and K. Pohlhausen: "Theory of Functions as Applied to Engineering Problems," Technology Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.

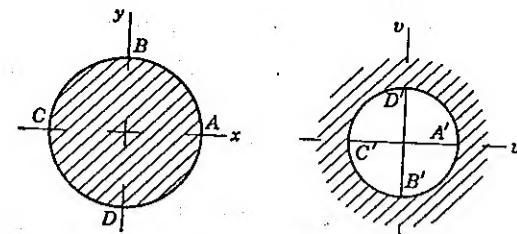
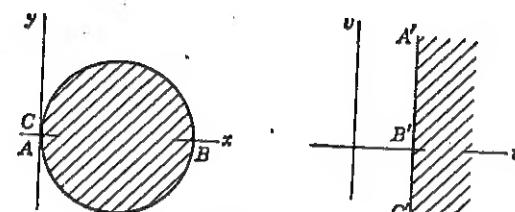
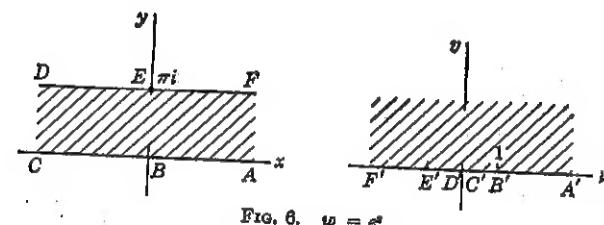
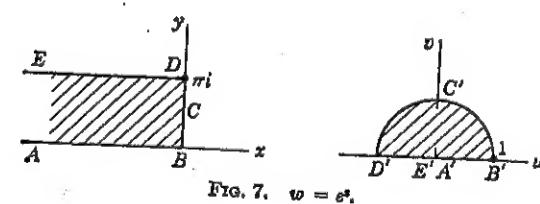
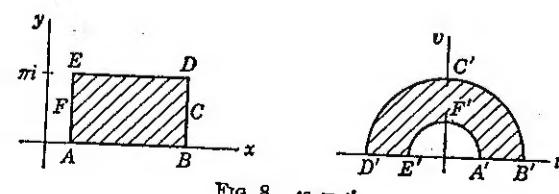
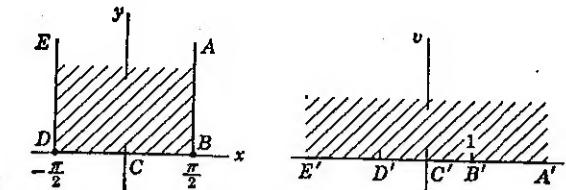
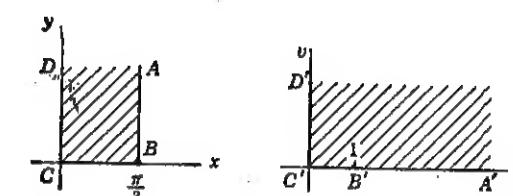
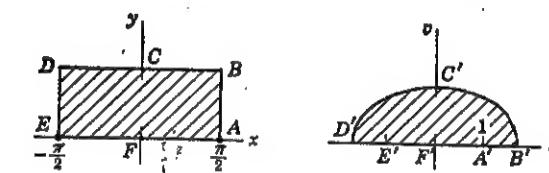
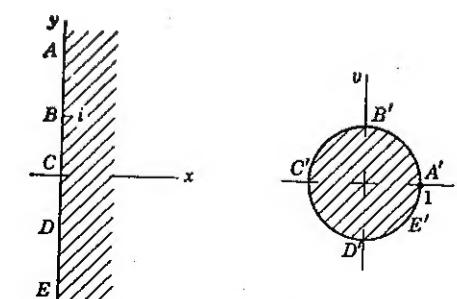
Smythe, W. R.: "Static and Dynamic Electricity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.

Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

Walker, M.: "Conjugate Functions for Engineers," Oxford University Press, London, 1933.

APÊNDICE 2

Tabela de Transformações de Regiões
(Ver Sec. 41)FIG. 1. $w = z^2$.FIG. 2. $w = z^3$.FIG. 3. $w = z^3$; $A'B' : p = \frac{2k^2}{1 + \cos \phi}$

FIG. 4. $w = 1/z.$ FIG. 5. $w = 1/z.$ FIG. 6. $w = e^z.$ FIG. 7. $w = e^z.$ FIG. 8. $w = e^z.$ FIG. 9. $w = \operatorname{sen} z.$ FIG. 10. $w = \operatorname{sen} z.$ FIG. 11. $w = \operatorname{sen} z; BCD; y = k, B'C'D': \left(\frac{u}{\operatorname{ch} k} \right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} k} \right)^2 = 1.$ FIG. 12. $w = \frac{z - 1}{z + 1}.$

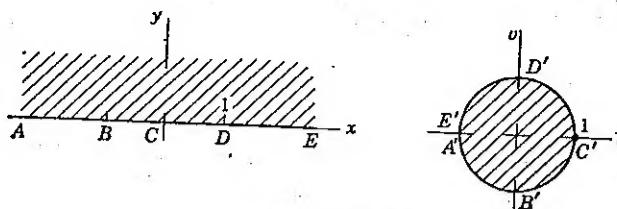
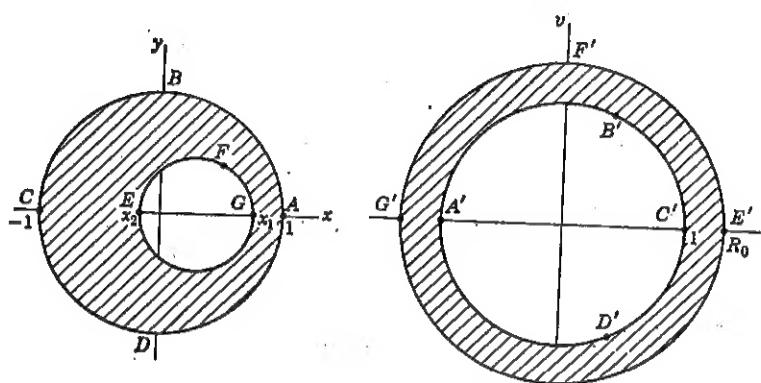
FIG. 13. $w = \frac{i-z}{i+z}$.

FIG. 14. $w = \frac{z-a}{az-1}; a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}; R_0 = \frac{1-x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}, (a > 1 \text{ e } R_0 > 1 \text{ quando } -1 < x_2 < x_1 < 1).$

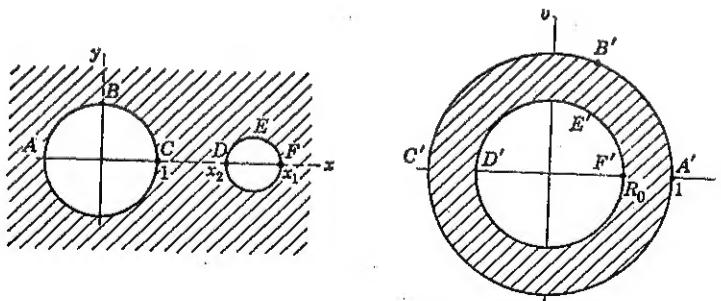
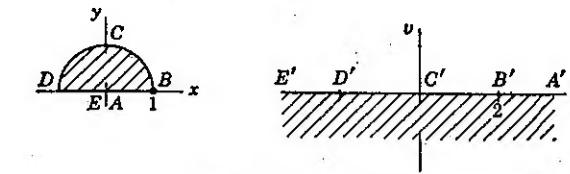
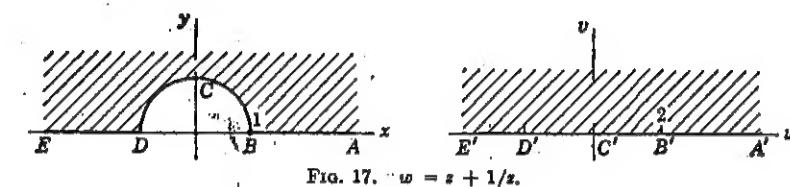
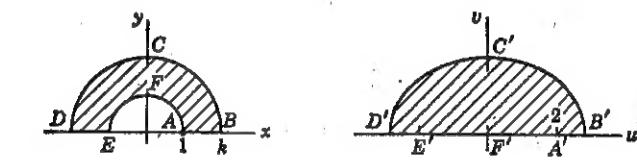
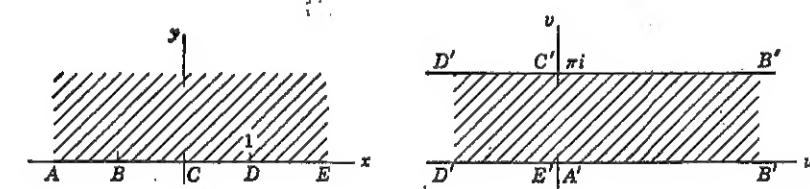
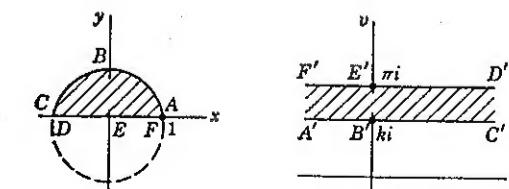
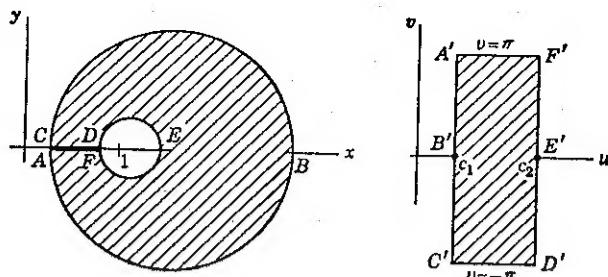
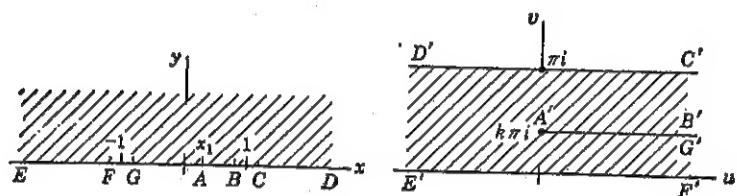
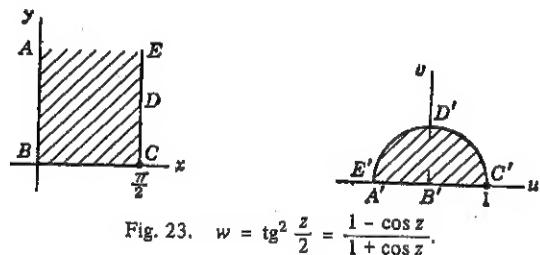
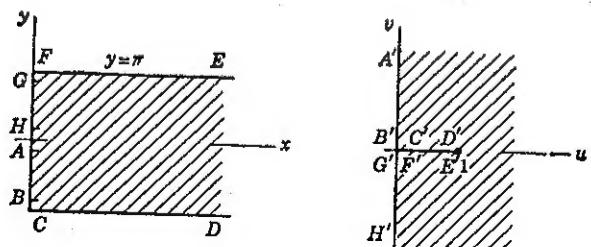
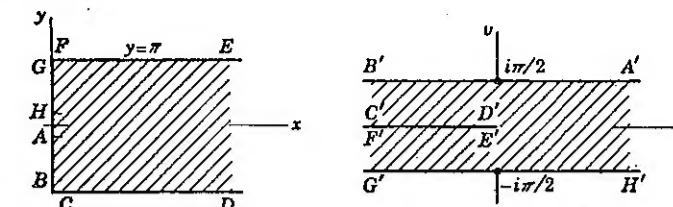
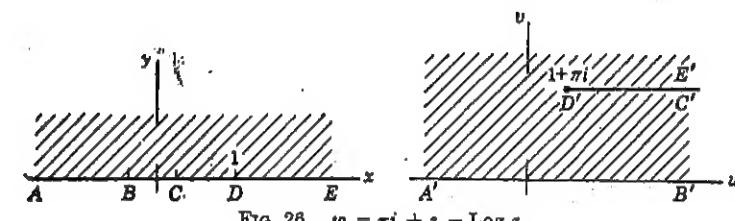
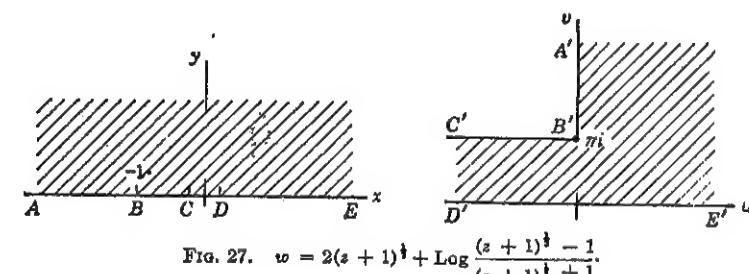
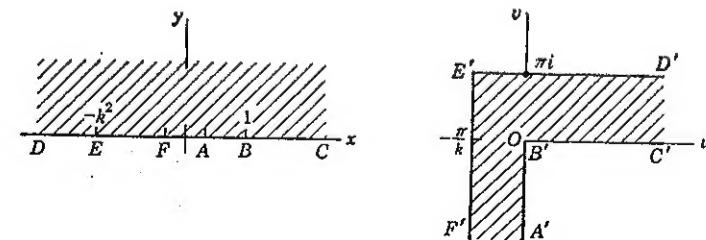
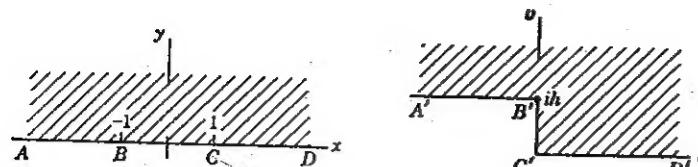
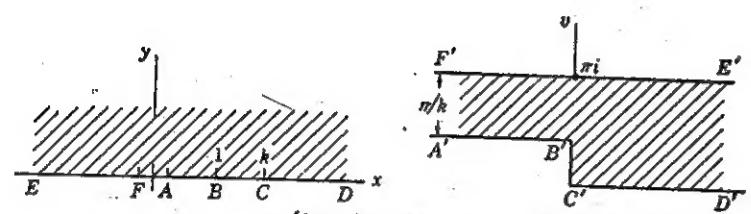


FIG. 15. $w = \frac{z-a}{az-1}; a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}; R_0 = \frac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}, (x_2 < a < x_1 \text{ e } 0 < R_0 < 1 \text{ quando } 1 < x_2 < x_1).$

FIG. 16. $w = z + 1/z$.FIG. 17. $w = z + 1/z$.FIG. 18. $w = z + \frac{1}{z}; B'C'D'; \left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1.$ FIG. 19. $w = \text{Log} \frac{z-1}{z+1} = \text{Log} \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2); z = -\cotg h \frac{w}{2}$.FIG. 20. $w = \text{Log} \frac{z-1}{z+1}; ABC; x^2 + y^2 - 2y \cotg k = 1.$

Fig. 21. $w = \text{Log} \frac{z+1}{z-1}$; centros de círculos em $z = \text{cotgh } c_n$, raios: cosech c_n ($n = 1, 2$).Fig. 22. $w = k \text{Log} \frac{z}{1-k} + \text{Log} 2(1-k) + i\pi - k \text{Log}(z+1) - (1-k) \text{Log}(z-1)$, $x_1 = 2k - 1$.Fig. 23. $w = \text{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}$.Fig. 24. $w = \text{cotgh} \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$.Fig. 25. $w = \text{Log} \text{cotgh} \frac{z}{2}$.Fig. 26. $w = \pi i + z - \text{Log } z$.Fig. 27. $w = 2(z+1)^{\frac{1}{2}} + \text{Log} \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(z+1)^{\frac{1}{2}} + 1}$.Fig. 28. $w = \frac{i}{k} \text{Log} \frac{1 + ikt}{1 - ikt} + \text{Log} \frac{1 + t}{1 - t}$; $t = \left(\frac{z - 1}{z + k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Fig. 29. $w = \frac{h}{x} [(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{ch}^{-1} z]^*$ Fig. 30. $w = \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{2s - k - 1}{k - 1} \right) - \frac{1}{k} \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{(k + 1)s - 2k}{(k - 1)s} \right]$

* Veja o exercício 4, Sec. 98.

Índice Analítico

- Aberta, região, 16
- Absoluta, convergência, 130
- Absoluto, valor, 7
- Aerodinâmica, 195
- Antiderivada, 107
- Arcos suaves, 91
- Argumento, 9
- Bernoulli, equação de, 199
- Beta, função, 163
- Bibliografia, 263
- Bilinear, transformação, 71
- Binomial, fórmula, 6
- Biunívoca, correspondência, 64
- Bolzano-Weierstrass, teorema de, 255
- Caminho, 91
- Caminho fechado, 91
- Cauchy, 34
- Cauchy, desigualdade de, 117
- Cauchy, fórmula integral de, 111
 - para semiplano, 236
- Cauchy-Goursat, teorema de, 100, 105
 - recíproca de, 116
- Cauchy, produto de, 139
- Cauchy-Riemann, condições de, 33
 - em coordenadas polares, 36
- Cauchy, valor principal de, 156
- Christoffel, 209
- Circulação de fluido, 195
- Círculo de convergência, 131
- Composta, função, 28
- Condições de contorno, 174-178
 - transformação de, 176
- Conexa, região, 17
- Conformes, transformações, 168
 - aplicações de, 180
- Conjugado, 6, 40
- Continuidade, 27
- Contradomínio de função, 19
- Convergência de série, 130
 - círculo de, 131
 - uniforme, 131
- Corte de ramo, 54, 76-80, 260
- Curvas, 91
- De Moivre, teorema de, 11
- Derivada, 29
- Derivada, existência de, 34, 36
- Desigualdades triangulares, 8
- Difusão, 182
- Dirichlet, problema de, 174
 - para círculo, 230, 233
 - para semicírculo, 232, 234
 - para semiplano, 236, 242
 - para quadrante, 241, 242
 - para retângulo, 194
- Domínios, 17
 - de funções, 19
 - intersecção de, 247
 - multiplamente conexos, 104
 - união de, 247
 - simplesmente conexos, 104
- Eletrônica, 189
- Encaixados, intervalos, 111
- Encaixados, quadrados, 102, 111
- Equipotenciais, 190, 197
- Escoamento de fluido, 195, 218
 - ao redor de cilindro, 201, 202
 - em canal, 203, 218, 227
 - em quadrante, 199
 - em volta de aerofólio, 204
 - em volta de placa, 203
 - potenciais para, 197-198
 - sobre degrau, 227
- Essencial, ponto singular, 149
 - comportamento na proximidade de, 252, 254
 - resíduo em, 151
- Exponentes complexos, 57
- Exponencial, função, 44, 59
 - inversa de, 55
 - transformação por, 81
- Fecho, 17, 70
- Fluido, circulação de, 195
 - pressão de, 199
 - rotação de, 196
 - velocidade de, 195
- Fluxo de calor, 180